Önermeler mantığı

David Pierce

26 Kasım 2012, saat 14:25

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Bu yazının ana kaynakları, Church'un [2], Shoenfield'in [7], Burris'in [1], ve Nesin'in [5] kitapları ve *Foundations of Mathematical Practice* (Eylül 2010) adlı notlarımdır. Bazı terimler, [3, 4] kaynaklarından alınmıştır.

İçindekiler

1 Önermeler 3

2 Bileşke önermeler 4

3 Önerme formülleri 9

4 Denklik 14

5 Gerektirme 19

6 Biçimsel kanıt 25

7 Öklid'in önermeleri 30

8 Tıkızlık 32

9 Biçimsel dizgeler 34

Kaynakça 44

1 Önermeler

Önerme, belli bir *durumda doğru* veya *yanlış* denebilen *cümledir.* Matematikte, **durum** çoğunlukla bir *yapıdır.* Örneğin, 'Her sayının tersi var' cümlesi, bir önermedir, ve bu önerme,

1) $(\mathbb{N}, +)$ yapısında yanlış,
2) $(\mathbb{Z}, +)$ yapısında doğru,
3) $(\mathbb{N}, \cdot\,)$ yapısında yanlış,
4) $(\mathbb{Q}^+, \cdot\,)$ yapısında doğrudur. (Burada $\mathbb{Q}^+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}$.)

Doğru ve yanlış, **doğruluk değerleridir.** *Doğru* doğruluk değerini 1 olarak yazalım; *yanlış* doğruluk değerini de 0 olarak.[*] Belli bir durumda, bir önerme doğru ise, o önermenin o durumdaki doğruluk değeri 1'dir; yanlış ise, önermenin durumdaki doğruluk değeri 0'dır.

Her durum, bir **doğruluk göndermesi** belirtir. Bu gönderme, her önermeyi o durumdaki doğruluk değerine gönderir. Mesela, d_1 doğruluk göndermesi, $(\mathbb{N}, +)$ yapısından tarafından belirtilsin. O zaman

$$d_1(\text{'Her sayının tersi var'}) = 0.$$

Ancak, d_2 doğruluk göndermesi, $(\mathbb{Z}, +)$ yapısından tarafından belirtilirse, o zaman

$$d_2(\text{'Her sayının tersi var'}) = 1.$$

[*] 1 ve 0 yerine, D ve Y, ya da $\top$ ve $\bot$, işaretleri kullanılabilir.

2 Bileşke önermeler

Verilmiş önermelerden, **bağlaçlarla, bileşke önermeler** yapılabilir, ve onların değerleri, verilmiş önermelerin değerlerinden bulunabilir. Mesela, iki önermemiz olsun, ve onlara, P ve Q diyelim.* O zaman 'P ve Q' önermesini oluşturabiliriz. Her durumda, bu yeni önerme doğrudur ancak ve ancak P doğrudur ve Q de doğrudur.

'P ve Q' önermesini $P \wedge Q$ olarak yazalım, ve d, bir doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$d(P \wedge Q) = 1 \text{ ancak ve ancak } d(P) = 1 \text{ ve } d(Q) = 1.$$

Genellikle $(d(P), d(Q))$ sıralı ikilisi için, dört tane seçenek vardır. Her seçenekteki $P \wedge Q$ önermesinin değeri, aşağıdaki gibi bir **doğruluk tablosunda** gösterilir.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Birçok önemli matematiksel önerme, 'P ise Q' biçimindedir. Bu önermeyi, $P \Rightarrow Q$ olarak yazarız. Her d doğruluk göndermesi için,

$$d(P \Rightarrow Q) = 1 \text{ ancak ve ancak } d(P) = 0 \text{ veya } d(Q) = 1.$$

$P \Rightarrow Q$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

*Q harfi, *kü* veya *kyü* gibi telaffuz edilebilir.

Örneğin, Öklid'in I.6 numaralı önermesine bakalım:

Eğer bir üçgenin birbirine eşit iki açısı varsa,
eşit açıların gördüğü kenarlar eşittir.

Şimdi

- P, 'B köşesindeki açı, C köşesindeki açıya eşittir' önermesi olsun, ve
- Q, 'AC kenarı AB kenarına eşittir' önermesi olsun.

Bir ABC üçgenini bir yapı olarak düşünürüz, ve bu yapı için, bir d doğruluk göndermesi vardır. O zaman Öklid'in I.6 numaralı önermesine göre, $d(P \Rightarrow Q) = 1$, yani,

$$\text{ya } d(P) = 0, \text{ ya da } d(Q) = 1.$$

Alıştırma 1. Yukarıdaki P ve Q için, öyle bir yapı bulun ki, bu yapıda $d(P \Rightarrow Q) = 0$ olsun.

Sözcüklerde ve simgelerde[†] kullanacağımız tüm bileşke önermeler, bu şekildedir:

P ve Q	$P \wedge Q$
P veya Q	$P \vee Q$
P ise Q	$P \Rightarrow Q$
P ancak ve ancak Q	$P \Leftrightarrow Q$
P değil	$\neg P$

Onların tüm olası doğruluk değerleri, 2.1 numaralı Şekildeki doğruluk tablolarında gösterilmiştir. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\neg$ işaretlerine **bağlayıcı** deriz.[‡]

Öklid'in I.13 numaralı önermesi, $P \vee Q$ biçimindedir. O önerme aşağıdaki gibidir:

[†]Bazı kitaplarda $P \wedge Q$ yerine P & Q, $P \Rightarrow Q$ yerine $P \rightarrow Q$ veya $P \supset Q$, $P \Leftrightarrow Q$ yerine $P \leftrightarrow Q$, ve $\neg P$ yerine $\sim P$ veya P' kullanılır.

[‡]Hatırlamak için: Latince *VEL* sözcüğu, 'veya' demektir, onun için 'veya', $\vee$ olarak yazılır. İngilizce *AND* sözcüğu, 've' demektir, ve $\wedge$ işareti, A gibidir.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

P	$\neg P$
0	1
1	0

Şekil 2.1: Basit formüllerin doğruluk tabloları

Eğer bir doğru, konulursa bir doğrunun üzerine,
yaptığı açılar, ya iki dik
ya da iki dik açıya eşit olacak.

ABC, bir doğru olsun, ve BD, başka bir doğru. Bu durum için, bir d doğruluk göndermesi var. O zaman

- P, 'ABD ve CBD açıları, diktir' önermesi olsun, ve
- Q, 'ABD ve CBD açıları, iki dik açıya eşittir' önermesi olsun.

I.13 numaralı önermeye göre,

$$\text{ya } d(P) = 1, \text{ ya da } d(Q) = 1.$$

Bir önermede, birden fazla bağlayıcı bulunabilir. Aslında, Öklid'in I.13 numaralı önermesi böyle düşünülebilir. Şimdi ABC ve ABD, bitişik açılar olsun, ve d, bu durum için doğruluk göndermesi olsun.

- P ve Q, yukarıdaki gibi olsun,
- F, $P \vee Q$ önermesi olsun, ve
- R, 'AB ve BC doğruları, bir doğrudadır' önermesi olsun.

O zaman I.13 numaralı önermeye göre, $d(R \Rightarrow F) = 1$. Üstelik, I.14 numaralı önermeye göre, $d(Q \Rightarrow R) = 1$; ve $d(P \Rightarrow R) = 1$, dik açının tanımından ve dördüncü postulattan. Bu şekilde $d(F \Rightarrow R) = 1$. Sonunda, tüm bunlara göre, $d(R \Leftrightarrow F) = 1$.

Başka bir örnek için, Öklid'in I.4 numaralı önermesine bakalım:

Eğer iki üçgenin iki kenarı iki kenara eşit olursa, her biri birine,
ve açı açıya eşit olursa, yani eşit doğrular tarafından içerilen,

hem taban tabana eşit olacak,
hem üçgen üçgene eşit olacak,
hem de geriye kalan açılar geriye kalan açılara eşit olacak, her biri birine,
yani eşit kenarları görenler.

Bu önerme, $F \Rightarrow G$ biçimdedir, ama F ve G önermelerin kendisi, bileşkedir. Aslında,

- P_1, 'AB kenarı, DE kenarına eşittir' önermesi olsun,
- P_2, 'AC kenarı, DF kenarına eşittir' önermesi olsun,
- P_3, 'BAC açısı, EDF açısına eşittir' önermesi olsun,
- F, $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ önermesi olsun,
- P_4, 'BC kenarı, EF kenarına eşittir' önermesi olsun,
- P_5, 'ABC üçgeni, DEF üçgenine eşittir' önermesi olsun,
- P_6, 'ABC açısı, DEF açısına eşittir' önermesi olsun,
- P_7, 'ACB açısı, DFE açısına eşittir' önermesi olsun, ve
- G, $P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7$ önermesi olsun.

ABC ve DEF ügenleri için, bir d doğruluk göndermesi vardır, ve I.4 numaralı önermeye göre, $d(F \Rightarrow G) = 1$ olur, yani $d(F) = 0$ veya $d(G) = 1$. Üstelik, $d(F) = 1$ ancak ve ancak

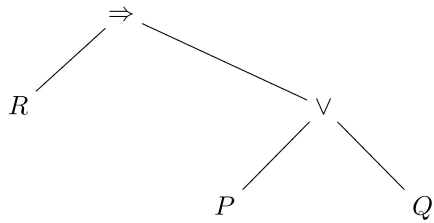
$$d(P_1) = d(P_2) = d(P_3) = 1;$$

ve $d(G) = 1$ ancak ve ancak

$$d(P_4) = d(P_5) = d(P_6) = d(P_7) = 1.$$

Bileşke bir önermenin bağlayıcılarından sadece biri, önermenin **ana bağlayıcısıdır.** Tekrar I.13 ve I.14 numaralı önermeler örneğine bakalım. Orada, $R \Rightarrow F$ önermesinin ana bağlayıcısı, $\Rightarrow$ bağlayıcısıdır. O önermede $\vee$ bağlayıcısı bulunur, ama bu, önermenin ana bağlayıcısı değil, F önermesinin ana bağlayıcısıdır.

$R \Rightarrow F$ önermesi, şimdi $R \Rightarrow P \vee Q$ olarak yazılamaz, çünkü bu ifade, önermenin ana bağlayıcısını göstermez. $R \Rightarrow (P \vee Q)$ gibi bir ifade yazılabilir veya bir *ağaç* çizilebilir:



$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ önermesinin ana bağlayıcısı, $\wedge$ bağlayıcısıdır, ama hangi $\wedge$? Bu önermede, $\wedge$ bağlayıcısının iki **geçişi** var.[§] Hangisinin ana bağlayıcı olduğu fark etmez. (Neden?) Kesinlik için, son geçiş olsun diyelim. O zaman $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ demek, $P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)$ demektir. Aynı şekilde, $P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7$ demek $P_4 \wedge (P_5 \wedge (P_6 \wedge P_7))$.

Ancak $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ önermesindeki $\Rightarrow$ bağlayıcısının hangi geçişinin önermenin ana bağlayıcısı olduğu önemlidir. (Neden?) Tekrar son geçiş olsun diyelim: $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ demek $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ demek olsun.

[§] *Geçiş* terimini [4] kitabından aldım; İngilizcesi, *occurrence.*

3 Önerme formülleri

Bundan sonra, daha biçimsel olacağız. P, Q, ve R gibi Latin harfleri, ve P_1 ve P_2 gibi bileşke simgeler, önerme değil, **önerme değişkenleridir.** Onlardan **önerme formülleri** oluştururuz, bu tanıma göre:

1. Her önerme değişkeni, bir önerme formülüdür.
2. F ve G, önerme formülleriyse, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, ve $(F \Leftrightarrow G)$ ifadeleri de önerme formülleridir.
3. F, önerme formülüyse, $\neg F$ ifadesi de bir önerme formülüdür.
4. 1 ve 0 simgeleri, önerme formülleridir.

Örneğin, P, $(P \wedge Q)$, $(R \wedge 1)$, $((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1))$, ve $\neg((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1))$, önerme formülleridir.

Teorem 1. *F, G, H, ve K, önerme formülleri olsun, ve $*$ ile $\dagger$, simgeler olsun. Eğer*

$$(F * G) \qquad \textit{ile} \qquad (H \dagger K)$$

aynı formüldür, o zaman F ve H, birbiriyle aynıdır, ve $*$ olarak yazılan simge, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, ve $\Leftrightarrow$ simgelerinden biridir.

Bu teoremi ispatlamıyoruz.

Bundan sonra, F, G, H, ve K gibi Latin harfleri her zaman önerme formüllerini gösterecek. Bu durumda, $(F * G)$ bir önerme formülüyse, o zaman $*$ olarak yazılan simge, $(F*G)$ formülünün **ana bağlayıcısıdır.**

$\neg F$ formülünün **ana bağlayıcısı,** $\neg$ simgesidir. Ayrıca, 0 veya 1, kendisinin **ana bağlayıcısı** olarak kabul edilir. Ancak bir değişkenin ana bağlayıcısı yoktur.

Her değişken olmayan formülün sadece bir tane ana bağlayıcısı vardır. Ayrıca, bir formülde, her değişken veya ayraç olmayan simge, bir ve sadece bir **alt formülün** ana bağlayıcısıdır. Bir formülün önerme değişkenleri de altformüller olur. Örneğin, $\neg((P \wedge Q) \Rightarrow R)$ formülünün alt formülleri, aşağıdaki tabloda sıralanmıştır.

altformül	ana bağlayıcısı
$\neg((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1))$	$\neg$
P	
$(P \wedge Q)$	$\wedge$
Q	
$((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1))$	$\Rightarrow$
R	
$(R \wedge 1)$	$\wedge$
1	1

Bundan sonra, **doğruluk göndermesi,** tüm önerme formülleri kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine 2.1 numaralı Şekildeki gibi aşağıdaki kurallara göre tanımlanmış bir fonksiyon anlamına gelecektir.

$d(F)$	$d(G)$	$d((F \wedge G))$	$d((F \vee G))$	$d((F \Rightarrow G))$	$d((F \Leftrightarrow G))$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

,

$d(F)$	$d(\neg F)$
0	1
1	0

, $\quad d(1) = 1, \quad d(0) = 0.$

Genellikle, F bir önerme formülüyse, ve d bir doğruluk göndermesiyse, $d(F)$ değerini hesaplamak için, F formülünün her G alt formülü için $d(G)$ değerini hesaplamalıyız. Bu $d(G)$ değeri, F formülünün doğruluk tablosunda,

1) eğer G bir değişkense, G altında,
2) eğer G değişken değilse, G formülünün ana bağlayıcısı altında,

gösterilebilir. Mesela $\neg((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1))$ formülünün doğruluk tablosunu 3.1 numaralı Şekildeki gibi oluştururuz. Sonuç olarak, formülün

$\neg$	(	(	P	$\wedge$	Q	)	$\Rightarrow$	(	R	$\wedge$	1	)	)
			0		0				0		1		
			1		0				0		1		
			0		1				0		1		
			1		1				0		1		
			0		0				1		1		
			1		0				1		1		
			0		1				1		1		
			1		1				1		1		
			0	0	0				0	0	1		
			1	0	0				0	0	1		
			0	0	1				0	0	1		
			1	1	1				0	0	1		
			0	0	0				1	1	1		
			1	0	0				1	1	1		
			0	0	1				1	1	1		
			1	1	1				1	1	1		
			0	0	0		1		0	0	1		
			1	0	0		1		0	0	1		
			0	0	1		1		0	0	1		
			1	1	1		0		0	0	1		
			0	0	0		1		1	1	1		
			1	0	0		1		1	1	1		
			0	0	1		1		1	1	1		
			1	1	1		1		1	1	1		
0			0	0	0		1		0	0	1		
0			1	0	0		1		0	0	1		
0			0	0	1		1		0	0	1		
1			1	1	1		0		0	0	1		
0			0	0	0		1		1	1	1		
0			1	0	0		1		1	1	1		
0			0	0	1		1		1	1	1		
0			1	1	1		1		1	1	1		

Şekil 3.1: Doğruluk tablosu hesaplanması

doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

P	Q	R	$\neg((P \wedge Q) \Rightarrow (R \wedge 1)$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

.

Önerme formüllerinde, bazı ayraçlar gerekmez ve kullanılmayabilir. O zaman doğruluk değerleri şu sırada hesaplanır:

1) 0 ve 1;
2) $\neg$;
3) $\wedge$ ve $\vee$;
4) $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$;
5) bir bağlayıcının iki geçişi varsa, sağdaki.

Örneğin:

a) $F * G$ demek $(F * G)$;
b) $\neg F * G$ ve $\neg(F * G)$ farklıdır;
c) $F \Rightarrow G \vee H$ demek $F \Rightarrow (G \vee H)$;
d) $F \wedge G \vee H$ belirsiz (onun için yazılmaz);
e) $F \wedge G \wedge H$ demek $F \wedge (G \wedge H)$;
f) $F \Rightarrow G \Rightarrow H$ demek $F \Rightarrow (G \Rightarrow H)$;
g) $F \Rightarrow G \wedge H \Rightarrow K$ demek $F \Rightarrow ((G \wedge H) \Rightarrow K)$.

$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına **iki konumlu** denir; $\neg$ bağlayıcısına, **bir konumlu** denir; 0 ve 1, **sıfır konumlu bağlayıcılar** olarak düşünülür.

Alıştırma 2. Aşağıdaki değişkensiz formülleri hesaplayın.

a) $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1$;
b) $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$;
c) $(0 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$;
d) $(0 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 1)$;

e) $\neg\neg\neg 0$;
f) $(1 \vee 0) \wedge 0$;
g) $1 \vee (0 \wedge 0)$.

Alıştırma 3. Aşağıdaki formüllerin doğruluk tablolarını yapın:

a) $P \Rightarrow Q \Rightarrow P$;
b) $P \wedge Q \wedge R$;
c) $\neg(P \Leftrightarrow \neg(Q \Leftrightarrow R))$;
d) $(P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow \neg P \vee Q$;
e) $(P \Rightarrow Q \vee \neg R) \wedge (Q \Rightarrow P \wedge R) \Rightarrow P \Rightarrow R$;
f) $\neg(\neg R \Rightarrow P \Rightarrow \neg(R \Rightarrow Q))$.

4 Denklik

İki önermenin doğruluk değeri her durumda aynıysa, o önermeler, mantıksal olarak birbirine **eşdeğer** veya **denktir.**

İki önerme *formülünün* doğruluk tabloları aynıysa, o formüller de birbirine **eşdeğer** veya **denktir.** Yukarıdaki Öklid'in I.13 ve I.14 numaralı önermeleri örneğinde zaten iki denklik kullandık. Mesela, $P \vee Q \Rightarrow R$ önermesi, $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ önermesine denktir ($P \vee Q \Rightarrow R$ ifadesinin $(P \vee Q) \Rightarrow R$ demek olduğunu hatırlayın). Bu önermelerin doğruluk tablolarını hesaplayalım:

P	$\vee$	Q	$\Rightarrow$	R
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

(	P	$\Rightarrow$	R	)	$\wedge$	(	Q	$\Rightarrow$	R	)
	0	1	0		1		0	1	0	
	1	0	0		0		0	1	0	
	0	1	0		0		1	0	0	
	1	0	0		0		1	0	0	
	0	1	1		1		0	1	1	
	1	1	1		1		0	1	1	
	0	1	1		1		1	1	1	
	1	1	1		1		1	1	1	

Böylece 4.1 numaralı Şekildeki tabloları elde ederiz. Bu tablolar, birbiriyle aynıdır; onun için

$$P \vee Q \Rightarrow R \text{ denktir } (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

deriz.

F ve G önerme formülleri eşdeğer ise,

$$F \sim G$$

ifadesini yazabiliriz. Örneğin,

$$P \vee Q \Rightarrow R \sim (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R).$$

P	Q	R	$P \vee Q \Rightarrow R$	P	Q	R	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 4.1: İki formülün doğruluk tabloları

Ancak, dikkatli olunmalı: $F \sim G$ ifadesi, önerme formülü değil; sadece 'F ve G formülleri, birbirine denktir', yani

$$F \text{ denktir } G$$

cümlesi için bir kısaltmadır.

Teorem 2. *Aşağıdaki eşdeğerliklerimiz vardır.*

1. *(Her önerme, sadece $\neg$ ve $\wedge$ ile yazılabilir:)*

$$\begin{gathered} P \vee Q \text{ denktir } \neg(\neg P \wedge \neg Q), \\ P \Rightarrow Q \text{ denktir } \neg P \vee Q, \\ P \Leftrightarrow Q \text{ denktir } (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P). \end{gathered}$$

2. *(Her önerme, sadece $\neg$ ve $\Rightarrow$ ile yazılabilir:)*

$$P \wedge Q \text{ denktir } \neg(P \Rightarrow \neg Q).$$

3. *(Çifte değilleme kaldırılabilir:)*

$$\neg\neg P \text{ denktir } P.$$

4. *(De Morgan* kuralları:)*

$$\begin{gathered} \neg(P \vee Q) \text{ denktir } \neg P \wedge \neg Q, \\ \neg(P \wedge Q) \text{ denktir } \neg P \vee \neg Q. \end{gathered}$$

*Augustus De Morgan, 1806–71, Büyük Britanyalı matematikçi ve mantıkçı [9, 8].

5. *($\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarının değişme ve birleşme özellikleri:)*

$$P \wedge Q \text{ denktir } Q \wedge P, \qquad (P \wedge Q) \wedge R \text{ denktir } P \wedge (Q \wedge R),$$
$$P \vee Q \text{ denktir } Q \vee P, \qquad (P \vee Q) \vee R \text{ denktir } P \vee (Q \vee R).$$

6. *($\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcıları birbiri üzerine dağılır:)*

$$P \wedge (Q \vee R) \text{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$
$$P \vee (Q \wedge R) \text{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

7. *(Fazlalıklar:)*

$$P \wedge P \text{ denktir } P, \qquad P \vee P \text{ denktir } P,$$
$$P \wedge \neg P \text{ denktir } 0, \qquad P \vee \neg P \text{ denktir } 1,$$
$$P \wedge 1 \text{ denktir } P, \qquad P \vee 0 \text{ denktir } P,$$
$$P \wedge 0 \text{ denktir } 0, \qquad P \vee 1 \text{ denktir } 1.$$

8. *(Yeni değişken:)*

$$P \text{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q),$$
$$P \text{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q).$$

9. *(Yutma:)*

$$P \wedge (P \vee Q) \text{ denktir } P,$$
$$P \vee (P \wedge Q) \text{ denktir } P.$$

Kanıt. **Alıştırma 4**. □

Bu teoremden, aşağıdaki teoremi kullanarak, sonsuz tane denklik elde edebiliriz. Örneğin, $P \Rightarrow Q$ formülü $\neg P \vee Q$ formününe denk olduğundan

$$P \wedge Q \Rightarrow R \text{ denktir } \neg(P \wedge Q) \vee R$$

ifadesini elde ederiz.

Teorem 3. *F ve G, birbirine denk formüller olsun; H, bir önerme değişkeni olsun; ve H', bir önerme formülü olsun. Eğer F formülünde H değişkeninin geçtiği her yere H' konulursa, F' formülü elde edilsin; benzer şekilde, G formülünden G' elde edilsin. O zaman*

$$F' \text{ denktir } G'.$$

Bu teoremi, ispatlamıyoruz.

Üstelik, $\neg(P \wedge Q)$ formülü $\neg P \vee \neg Q$ formülüne denk olduğundan, sonraki teorem sayesinde,

$$\neg(P \wedge Q) \vee R \text{ denktir } (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$

ifadesini elde ederiz.

Teorem 4. *F formülü, bir G formülünün bir alt formülü olsun, ve F, bir F^* formülüne denk olsun. Eğer, G formülünde, F alt formülünün yerine F^* konulursa, G^* formülü elde edilsin. O zaman*

$$G \text{ denktir } G^*.$$

Bu teoremi de ispatlamıyoruz. Ancak, şimdi aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 5. $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ *denktir* $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$.

Kanıt. Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.

$$\begin{aligned}
&(P \vee Q) \wedge (R \vee S) & \\
\sim\ &((P \vee Q) \wedge R) \vee ((P \vee Q) \wedge S) & \text{[dağılma]} \\
\sim\ &(R \wedge (P \vee Q)) \vee (S \wedge (P \vee Q)) & \text{[değişme]} \\
\sim\ &((R \wedge P) \vee (R \wedge Q)) \vee ((S \wedge P) \vee (S \wedge Q)) & \text{[dağılma]} \\
\sim\ &(R \wedge P) \vee (R \wedge Q) \vee (S \wedge P) \vee (S \wedge Q) & \text{[birleşme]} \\
\sim\ &(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S) & \text{[değişme]}
\end{aligned}$$

Bu ispatın her adımında, 3 numaralı ve 4 numaralı Teoremleri kullandık. □

Benzer şekilde:

Teorem 6.

$$\neg P \vee (P \wedge Q) \textit{ denktir } \neg P \vee Q, \qquad \neg P \wedge (P \vee Q) \textit{ denktir } \neg P \wedge Q,$$
$$P \vee (\neg P \wedge Q) \textit{ denktir } P \vee Q, \qquad P \wedge (\neg P \vee Q) \textit{ denktir } P \wedge Q.$$

Kanıt. Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.

$$\begin{aligned} &\neg P \vee (P \wedge Q) \\ \sim\ &(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) && \text{[dağılma]} \\ \sim\ &1 \wedge (\neg P \vee Q) && \text{[fazlalık]} \\ \sim\ &\neg P \vee Q && \text{[fazlalık]} \end{aligned}$$

Diğer denklikler, **Alıştırma 5**. □

5 Gerektirme

Eğer, her d doğruluk göndermesi için, $d(F) = d(G)$ ise, o zaman F ve G, birbirine denktir. Yani, F denktir G, eğer, her d için,

1) $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$,
2) $d(G) = 1$ ise $d(F) = 1$.

Şimdi, her d için, sadece $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$ olduğunu varsayalım. O zaman F formülü, G formülünü **gerektirir** deriz. Mesela,

$$P \vee Q \Rightarrow R \text{ gerektirir } P \Rightarrow R,$$

aşağıdaki doğruluk tablosundan:

P	Q	R	$P \vee Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Buradaki her satırda, ya $P \vee Q \Rightarrow R$ formülünün değeri 0, ya da $P \Rightarrow R$ formülünün değeri 1. Tabii ki ikisi de olabilir.

Teorem 7.

Basitleştirme:

$$P \wedge Q \textit{ gerektirir } P, \qquad P \wedge Q \textit{ gerektirir } Q.$$

Ekleme:

$$P \textit{ gerektirir } P \vee Q, \qquad Q \textit{ gerektirir } P \vee Q.$$

Kanıt. **Alıştırma 6**. □

İki formül de bir formülü gerektirebilir. F ve G formülleri, H formülünü gerektirir, ancak ve ancak, her d doğruluk göndermesi için, ya $d(F) = 0$, ya $d(G) = 0$, ya da $d(H) = 1$. Mesela,

$$P \Rightarrow Q \text{ ile } Q \Rightarrow R \text{ gerektirir } P \Rightarrow R,$$

aşağıdaki tablodan:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Aslında, sadece 1., 5., 7., ve 8. satırda, hem $P \Rightarrow Q$ ve $Q \Rightarrow R$ doğru, ve o satırda, $P \Rightarrow R$ de doğrudur. Ancak, $P \Rightarrow R$ ve $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ formülünü gerektirmez.

Teorem 8. *Aşağıdaki gerektirmelerimiz vardır.*

Bağlama:

$$P \textit{ ile } Q \textit{ gerektirir } P \wedge Q.$$

Ayırma:

$$P \textit{ ile } P \Rightarrow Q \textit{ gerektirir } Q, \qquad P \vee Q \textit{ ile } \neg P \textit{ gerektirir } Q,$$
$$\neg Q \textit{ ile } P \Rightarrow Q \textit{ gerektirir } \neg P, \qquad P \vee Q \textit{ ile } \neg Q \textit{ gerektirir } P.$$

Hipotetik tasım:

$$P \Rightarrow Q \textit{ ile } Q \Rightarrow R \textit{ gerektirir } P \Rightarrow R.$$

Kanıt. **Alıştırma 7**. (Hipotetik tasım gerektirmesini zaten ispatladık.) □

İkiden fazla formül, bir formül gerektirebilir. Γ (*Gamma*), bir önerme formülü *kümesi* olsun, ve F, bir önerme formülü olsun. Eğer her d doğruluk göndermesi için,

1) ya Γ kümesindeki bir G için, $d(G) = 0$,
2) ya da $d(F) = 1$

sağlanıyorsa, o zaman Γ, F formülünü **gerektirir.** Yani, Γ, F formülünü gerektirir, ancak ve ancak, $\Gamma \cup \{F\}$ kümesindeki bütün formüllerin doğruluk tablosunun her satırında,

1) ya Γ kümesindeki bir formül yanlıştır,
2) ya da F formülü doğrudur.

Teorem 9.

Olumlu dilemma:

$$P \Rightarrow Q,\ R \Rightarrow S \text{ ve } P \vee R \text{ gerektirir } Q \vee S.$$

Kanıt. Gerektirme, 5.1 numaralı Şekildeki doğruluk tablosundan görünebilir. Aslında, sadece 4., 12., 13., 15., ve 16. satırlarda, hem $P \Rightarrow Q$, hem $R \Rightarrow S$, hem de $P \vee R$ doğru, ve o satırlarda, $Q \vee S$ de doğru. □

Alıştırma 8. $P \vee Q \vee R$, $P \Rightarrow Q$, ve $Q \Rightarrow R$ gerektirir R olduğunu gösterin.

Bir önerme formülü, boş küme tarafından gerektirilebilir. Bu durumda, o formüle **doğrusal geçerli formül,** veya **mantıksal doğru formül,** veya **totoloji** denir.* O zaman F bir totoloji, ancak ve ancak, her d doğruluk göndermesi için, $d(F) = 1$. Mesela,

$$P \vee \neg P, \qquad\qquad 1$$

formülleri, totolojidirler. Aşağıdaki teoremden dolayı yukarıdaki teoremleri kullanarak yeni totolojiler elde edebiliriz.

Teorem 10.

*Ali Nesin [5], öyle formüllere *hepdoğru* adını verir.

P	Q	R	S	$P \Rightarrow Q$	$R \Rightarrow S$	$P \vee R$	$Q \vee S$
0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 5.1: Teorem 9 için doğruluk tablosu

1. *F ve G formülleri birbirine denktir, ancak ve ancak*

$$F \Leftrightarrow G$$

formülü bir totolojidir.

2. *F formülü, G formülünü gerektirir, ancak ve ancak*

$$F \Rightarrow G$$

formülü bir totolojidir.

3. *F ile G formülleri, H formülünü gerektir, ancak ve ancak*

$$F \wedge G \Rightarrow H$$

formülü bir totolojidir.

4. *F, G, ve H formülleri, K formülünü gerektir, ancak ve ancak*

$$F \wedge G \wedge H \Rightarrow K$$

formülü bir totolojidir.

Kanıt. F denktir G, ancak ve ancak, her d doğruluk göndermesi için, $d(F) = d(G)$, yani $d(F \Leftrightarrow G) = 1$. Diğer bölümler, **Alıştırma 9**. □

Sonraki teoremi görmek yararlı olabilir.

Teorem 11. *Γ, Δ (*Delta*) kümesinin her elemanını içersin.*

$$\Delta \textit{ gerektirir } F \textit{ ise, o zaman } \Gamma \textit{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

Bu teorem, sonraki teoremin özel durumudur.

Teorem 12. *Γ, Δ kümesindeki her formülü gerektirsin.*

$$\Delta \textit{ gerektirir } F \textit{ ise, o zaman } \Gamma \textit{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

17. sayfadaki Teorem 3 gibi bir teoremimiz var:

Teorem 13. *F formülü, G formülünü gerektirsin; H, bir önerme değişkeni olsun; ve H', bir önerme formülü olsun. Eğer F formülünde H değişkeninin geçtiği her yere H' konulursa, F' formülü elde edilsin; eğer G formülünde H değişkeninin geçtiği her yere H' konulursa, G' formülü elde edilsin. O zaman*

$$F' \textit{ gerektirir } G'.$$

Tekrar bu teoremi, ispatlamıyoruz. Bu teorem dolayısıyla

$$\begin{aligned} P \lor \neg Q \lor R \text{ ile } \neg P \text{ gerektirir } \neg Q \lor R, &\quad \text{[Ayırma (Teorem 8)]} \\ Q \text{ gerektirir } \neg\neg Q, &\quad \text{[çifte değilleme (Teorem 2)]} \\ \neg Q \lor R \text{ ile } \neg\neg Q \text{ gerektirir } R. &\quad \text{[Ayırma]} \end{aligned}$$

O zaman 11 numaralı Teoremlerden dolayı

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P \text{ ve } Q \text{ gerektirir } \neg Q \lor R \text{ ve } \neg\neg Q,$$

ve 12 numaralı teoremlerden dolayı

$$P \vee \neg Q \vee R,\ \neg P \text{ ve } Q \text{ gerektirir } R.$$

Bu gerektirmeyi, doğruluk tabloları kullanmadan ispatladık. Kanıtlamak için, sadece

$$P \vee \neg Q \vee R, \qquad \neg P, \qquad \neg Q \vee R, \qquad Q, \qquad \neg\neg Q, \qquad R \tag{5.1}$$

formülleri yazdık. Bu formüller listesi, *biçimsel bir kanıttır.*

6 Biçimsel kanıt

Şimdi Γ,

$$\{\neg(S \wedge T), (R \wedge Q) \vee (T \wedge Q), P \vee (S \wedge \neg T), \\ \neg T \vee (Q \wedge (S \vee R)), \neg R \vee T\}$$

kümesi olsun. O zaman

$$\Gamma \text{ gerektirir } P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T; \tag{6.1}$$

ama bunu doğruluk tablosu yöntemiyle göstermek sıkıcı olurdu. *Biçimsel kanıt* yöntemi, bu durumda hem daha kısa, hem daha ilginçtir.

Biçimsel kanıt, bir formüller listesidir.

$$F_1, \dots, F_n,$$

biçimsel bir kanıt olsun. Bu biçimsel kanıtın **sonucu,** F_n formülüdür. $1 \leqslant k \leqslant n$ varsayılsın. Eğer $\{F_1, \dots, F_{k-1}\}$ kümesi, F_k formülünü *gerektirmezse,* o zaman F_k, biçimsel kanıtın **hipotezlerinden** biridir. (Eğer $k = 1$ ise, o zaman $\{F_1, \dots, F_{k-1}\}$ kümesi boştur.) Bu tanıma göre, biçimsel kanıtın sonucu, bir hipotez de olabilir.

Tekrar (5.1) listesine bakalım. Bu biçimsel kanıtın hipotezleri, $P \vee \neg Q \vee R$, $\neg P$, ve Q formülleridir. $\neg Q \vee R$, hipotez değildir, çünkü onu, önceki formüller gerektirir; aynı nedenle, R de hipotez değildir.

Teorem 14. Γ*, bir önerme formülleri kümesi olsun. Eğer* $F_1, \dots, F_n$ *biçimsel kanıtın hipotezleri* Γ *kümesinden geliyorsa, o zaman*

$$\Gamma \textit{ gerektirir } F_n.$$

Kanıt. Çünkü

$$\begin{gathered}
\Gamma \text{ gerektirir } F_1, \\
\Gamma \cup \{F_1\} \text{ gerektirir } F_2, \\
\Gamma \cup \{F_1, F_2\} \text{ gerektirir } F_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\Gamma \cup \{F_1, \dots, F_{n-1}\} \text{ gerektirir } F_n,
\end{gathered}$$

12 numaralı teorem dolayısıyla Γ gerektirir F_n. □

Bu teoremde, biçimsel kanıt, Γ kümesinden F_n formülünü **kanıtlar;** ve biçimsel kanıt, F_n **formülünün** Γ **kümesinden** biçimsel bir kanıtıdır.

Sonlu bir Γ kümesi için, teoremin tersi de kolaydır. $\Gamma = \{F_1, \dots, F_{n-1}\}$ ise, ve Γ gerektirir F_n ise, o zaman $F_1, \dots, F_n$ listesi, F_n formülünün Γ kümesinden bir biçimsel kanıtıdır. Ama Γ kümesinin F_n formülünü gerektirdiğini birine *göstermek* istersek, sadece $F_1, \dots, F_n$ listesini yazmak yeterli olmayabilir; daha fazla formüller yazmamız gerekebilir.

Örneğin, 8 numaralı Alıştırmayı yaptıysak, aşağıdaki listenin, R formülünün $P \lor Q \lor R$, $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ hipotezlerinden bir biçimsel kanıtı olduğunu biliyoruz:

$$P \lor Q \lor R, \qquad P \Rightarrow Q, \qquad Q \Rightarrow R, \qquad R.$$

Ancak, o alıştırmayı yapmadıysak, daha fazla adım gerekir, 6.1 numaralı Şekildeki gibi. Adımların nedenlerini ekleyebiliriz, 6.2 numaralı Şekildeki gibi.

Alıştırma 10. Yukarıdaki (6.1) gerektirmesinin, 6.3 numaralı Şekilde biçimsel kanıtı vardır. Her satırın nedenini verin.

Alıştırma 11. Aşağıdaki totolojiler ve gerektirmeler için biçimsel kanıtlar yazın.

1. $P \Rightarrow P \Rightarrow P$ bir totolojidir.
2. $P \Rightarrow Q \Rightarrow P$ bir totolojidir.
3. $P \lor (P \Rightarrow Q)$ bir totolojidir.

$$P \Rightarrow Q$$
$$\neg P \vee Q$$
$$\neg P \vee Q \vee R$$
$$Q \Rightarrow R$$
$$\neg Q \vee R$$
$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$
$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$
$$\neg(P \vee Q) \vee R$$
$$P \vee Q \vee R$$
$$(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$
$$(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R$$
$$1 \wedge R$$
$$R$$

Şekil 6.1: Biçimsel bir kanıt

4. $(P \Rightarrow Q) \vee \neg Q$ bir totolojidir.
5. $P \Rightarrow Q \wedge R$ gerektirir $P \Rightarrow Q$.
6. $P \wedge \neg P$ gerektirir Q.
7. $P \wedge (Q \vee R)$ gerektirir $P \Leftrightarrow (\neg Q \vee P)$.
8. $P \Rightarrow Q$ ile $P \Rightarrow \neg Q$ gerektirir $\neg P$.
9. $P \Rightarrow R$ ile $Q \Rightarrow R$ gerektirir $P \vee Q \Rightarrow R$.
10. $P \Rightarrow R$ ile $Q \Rightarrow S$ gerektirir $P \vee Q \Rightarrow R \vee S$.

1.	$P \Rightarrow Q$	hipotez
2.	$\neg P \vee Q$	1. satırdan $P \Rightarrow Q \sim \neg P \vee Q$ ile
3.	$\neg P \vee Q \vee R$	2. satırdan eklemeyle
4.	$Q \Rightarrow R$	hipotez
5.	$\neg Q \vee R$	4. satırdan $P \Rightarrow Q \sim \neg P \vee Q$ ile
6.	$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$	3. ve 5. satırdan bağlamayla
7.	$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R$	6. satırdan dağılmayla
8.	$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$	7. satırdan $\neg P \wedge (P \vee Q) \sim \neg P \wedge Q$ ile
9.	$\neg(P \vee Q) \vee R$	8. satırdan De Morgan kuralıyla
10.	$P \vee Q \vee R$	hipotez
11.	$(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$	9. ve 10. satırdan bağlamayla
12.	$(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R$	11. satırdan dağılmayla
13.	$1 \wedge R$	12. satırdan fazlalıkla
14.	R	13. satırdan fazlalıkla

Şekil 6.2: Açıklamalı bir kanıt

$$(R \wedge Q) \vee (T \wedge Q)$$
$$(R \vee T) \wedge Q$$
$$Q$$
$$R \vee T$$
$$\neg R \vee T$$
$$(R \vee T) \wedge (\neg R \vee T)$$
$$(R \wedge \neg R) \vee T$$
$$1 \vee T$$
$$T$$
$$\neg(S \wedge T)$$
$$\neg S \vee \neg T$$
$$\neg\neg T$$
$$\neg S \neg S \wedge T$$
$$P \vee (S \wedge \neg T)$$
$$\neg S \vee \neg\neg T$$
$$\neg(S \wedge \neg T)$$
$$P$$
$$\neg T \vee (Q \wedge (S \vee R))$$
$$Q \wedge (S \vee R)$$
$$S \vee R$$
$$R$$
$$R \wedge \neg S \wedge T$$
$$Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$$
$$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$$

Şekil 6.3: Biçimsel bir kanıt

7 Öklid'in önermeleri

Öklid'in önermelerinin gösterileri, daha biçimsel olarak yazılabilir. Örneğin, onun I.5 numaralı önermesine bakalım. Likyalı Proklus'a göre [6, sayfa 159], Öklid'in her önermesinin 6 tane parçası var: (1) ilan, (2) açıklama, (3) belirtme, (4) hazırlama, (5) gösteri, ve (6) bitirme. Açıklamada hipotezler bulunur; belirtmede sonuçlar bulunur. Çoğunlukla bir önermenin bir sonucu vardır; ama I.5 numaralı önermenin iki sonucu vardır. Hazırlama ve gösteri, sonuçların hipotezlerinden biçimsel kanıt olarak yazılabilir. Gösterinin hipotezleri, hazırlamadan da gelebilir.

İlan: Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir,
ve, eşit doğrular uzatıldığında,
tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklardır.

Açıklama: $\mathrm{AB\Gamma}$ üçgeninde $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.
AB, Δ noktasına uzatılmış.
$\mathrm{A\Gamma}$, E noktasına uzatılmış.

Belirtme:

1. $\angle\mathrm{AB\Gamma} = \angle\mathrm{A\Gamma B}$ ve
2. $\angle\mathrm{\Gamma B\Delta} = \angle\mathrm{B\Gamma E}$.

Hazırlama:

1. Z noktası, $\mathrm{B\Delta}$ doğrusundadır.
2. H noktası, $\mathrm{\Gamma E}$ doğrusundadır, ve $\mathrm{AH} = \mathrm{AZ}$. [I.3]

Gösteri:

1. $\mathrm{AZ} = \mathrm{AH}$ [hazırlamadaki 2. satırdan]
2. $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ [hipotez]
3. $\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{HB}$ [1. ve 2. satırdan I.4 ile]

4. $\triangle \mathrm{AZ\Gamma} = \triangle \mathrm{AHB}$ [1. ve 2. satırdan I.4 ile]

5. $\angle \mathrm{A\Gamma Z} = \angle \mathrm{ABH}$ [1. ve 2. satırdan I.4 ile]

6. $\angle \mathrm{AZ\Gamma} = \angle \mathrm{AHB}$ [1. ve 2. satırdan I.4 ile]

7. $\mathrm{BZ} = \mathrm{\Gamma H}$ [1. ve 2. satırdan genel kavram 3 ile]

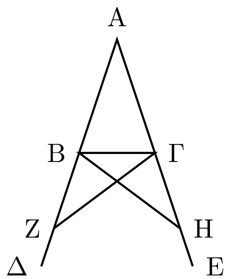
8. $\triangle \mathrm{BZ\Gamma} = \triangle \mathrm{\Gamma HB}$ [3., 6., ve 7. satırdan I.4 ile]

9. $\angle \mathrm{ZB\Gamma} = \angle \mathrm{H\Gamma B}$ [3., 6., ve 7. satırdan I.4 ile]

10. $\angle \mathrm{B\Gamma Z} = \angle \mathrm{\Gamma BH}$ [3., 6., ve 7. satırdan I.4 ile]

11. $\angle \mathrm{AB\Gamma} = \angle \mathrm{A\Gamma B}$ [5. ve 10. satırdan genel kavram 3 ile]

Bitirme: Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir,
ve, eşit doğrular uzatıldığında,
tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklar.
Gösterilmesi gereken tam buydu.



Burada, belirtmedeki 1. sonuç, gösterinin 11. satırıdır, ve 2. sonuç, gösterinin 9. satırıdır; $\angle \mathrm{ZB\Gamma} = \angle \mathrm{\Gamma B\Delta}$ ve $\angle \mathrm{H\Gamma B} = \angle \mathrm{B\Gamma E}$ eşitliklerini tanımamız gerekir. Öklid, gösterinin 4. ve 8. satırını verir, ama kullanmaz.

Alıştırma 12. Biçimsel olarak Öklid'in her önermesini yazın.

8 Tıkızlık

Önceden dediğimiz gibi, her *sonlu* Γ önermeler kümesi için, eğer Γ, bir F formülünü gerektiriyorsa, o zaman F formülünün Γ kümesinden bir biçimsel kanıtı vardır. Sonluluk koşulu kaldırılabilir: bu gerçeğe **tıkızlık** denir.

d, bir doğruluk göndermesiyse, ve Δ, bir formüller kümesiyse, ve Δ kümesindeki her G için, $d(G) = 1$ ise, o zaman d göndermesine Δ kümesinin bir **modeli** denir.

Teorem 15. *Γ gerektirir F ancak ve ancak $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kümesinin modeli yok.*

Kanıt. **Alıştırma 13**. □

Teorem 16 (Tıkızlık)**.** *Γ, F formülünü gerektirirse, o zaman F formülünün Γ kümesinden bir biçimsel kanıtı vardır.*

Kanıt. Karşıt tersini ispatlayacağız. F formülünün Γ kümesinden hiç biçimsel kanıtı olmadığını varsayalım. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kümesinin bir modelini bulacağız.

Γ kümesinin her sonlu $\{G_1, \dots, G_n\}$ altkümesi için, o altküme, F formülünü gerektirmez. (Bildiğimiz gibi $\{G_1, \dots, G_n\}$, F formülünü gerektirirse, o zaman $G_1, \dots, G_n, F$ listesi, F formülün Γ kümesinden biçimsel bir kanıtıdır.) Dolayısıyla $\{G_1, \dots, G_n, \neg F\}$ kümesinin modeli vardır.

Tüm önerme değişkenlerinin, $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ kümesini oluşturduğunu varsayabiliriz. Her n için, Γ_n, Γ kümesinde olan ve değişkenleri sadece $\{P_1, \dots, P_n\}$ kümesinden olan formüller kümesi olsun. Γ_n sonsuz olabilir; ama Γ_n kümesindeki formüllerin doğruluk tablolarının kümesi, sonludur. Onun için $\Gamma_n \cup \{\neg F\}$ kümesinin modeli vardır. M_n, o kümenin tüm modellerinin kümesi olsun. $n \leqslant p$ ise, o zaman M_n, M_p kümesini kapsar. Bir

d^* doğruluk göndermesi için, her n için, d^* göndermesinin M_n kümesinin bir elemanı olduğunu göstereceğiz.

Eğer bir n için, M_n kümesindeki her d için, $d(P_1) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_1) = 0$ olsun. Öteki durumda, her n için, M_n kümesindeki bir d için, $d(P_1) = 1$ olur; bu durumda, $d^*(P_1) = 1$ olsun. Her durumda, her n için, M_n kümesinin $d(P_1) = d^*(P_1)$ olduğu d elemanı vardır.

Eğer bir n için, M_n kümesindeki $d(P_1) = d^*(P_1)$ eşitliğini sağlayan her d için, $d(P_2) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_2) = 0$ olsun. Öteki durumda, her n için, M_n kümesindeki bir d için, $d(P_1) = d^*(P_1)$ ve $d(P_2) = 1$ olur; bu durumda, $d^*(P_2) = 1$ olsun. Her durumda, her n için, M_n kümesinin $d(P_1) = d^*(P_1)$ ve $d(P_2) = d^*(P_2)$ eşitliğini sağlayan d elemanı vardır.

Aynı şekilde devam ediyoruz. Bir k için, $d^*(P_1)$, ..., $d^*(P_k)$ değerlerini seçtiğimizi varsayalım, ve her n için, M_n kümesinin

$$d(P_1) = d^*(P_1), \qquad \dots, \qquad d(P_k) = d^*(P_k)$$

eşitliklerini sağlayan d elemanının olduğunu varsayalım. Eğer bir n için, M_n kümesindeki $d(P_1) = d^*(P_1)$, ..., $d(P_k) = d^*(P_k)$ eşitliklerini sağlayan her d için, $d(P_{k+1}) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_{k+1}) = 0$ olsun. Öteki durumda, her n için, M_n kümesindeki bir d için, $d(P_1) = d^*(P_1)$, ..., $d(P_{k+1}) = 1$ olur; bu durumda, $d^*(P_{k+1}) = 1$ olsun. Her durumda, her n için, M_n kümesinin $d(P_1) = d^*(P_1)$, ..., $d(P_{k+1}) = d^*(P_{k+1})$ eşitliklerini sağlayan d elemanı vardır.

Şimdi her n için d^*, $\Gamma_n \cup \{\neg F\}$ kümesinin bir modelidir; o zaman d^*, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kümesinin modelidir. Bu şekilde Γ, F formülünü gerektirmez. $\square$

9 Biçimsel dizgeler

Tanıma göre, biçimsel bir kanıtta, her satır,

1) ya bir totoloji,
2) ya önceki satırlar tarafından gerektirilen bir formül,
3) ya da bir hipotezdir.

Bir formül, totoloji ise, bunu doğruluk tablosuyla gösterebiliriz. Bir formül, başka formüller tarafından gerektiriliyorsa, bunu da doğruluk tablolarıyla gösterebiliriz. Ancak, doğruluk tablolarını kullanmadan, biçimsel bir kanıtın hipotezlerini ve hipotez olmayan satırlarını ayırt edebilmek isteriz. Bunu yapmak için biçimsel bir yönteme, *biçimsel dizge* denir. Kesinlik için, **biçimsel dizge,**

1) bazı bilinen totolojilerden ve
2) bazı bilinen gerektirmelerden

oluşur. Bu bilinen totolojilere dizgenin **aksiyomu** denir; bu bilinen gerektirmelere dizgenin **çıkarım kuralı** denir.

D, biçimsel bir dizge; Γ, bir formüller kümesi; ve K, biçimsel bir kanıt olsun. Eğer K kanıtın her satırı,

1) ya D dizgesinin bir aksiyomu,
2) ya D dizgesinin bir çıkarım kuralına göre önceki satırlar tarafından gerektirilen bir formül,
3) ya da Γ kümesinin bir elemanı ise,

o zaman Γ, K kanıtın sonucunu gerektirir, ve ayrıca, bu gerektirme, D dizgesinin **(biçimsel) bir teoremdir.** Her gerektirme, D dizgesinin bir teoremi ise, bu dizgeye **tam** denir.

9.1 Biçimsel D_1 dizgesi

Şimdi D_1 adlı biçimsel dizgesini tanımlayacağız. Aksiyomları, iki şekilde:

- 1 formülü,
- her $\neg F \lor F$ formülü.

Çıkarım kuralları, üç şekilde:

Ekleme: Tüm F ve G formülleri için, F formülünden $G \lor F$ çıkar.

Bağlama: F ile G formüllerinden $F \land G$ çıkar.

Yerine Koyma: $F \sim G$, 2 numaralı Teoremden bir denklik olsun. Bu denklikten, 3 numaralı Teoreme göre, $F' \sim G'$ denkliği sağlansın. Eğer bir K formülün F' alt formülü var, ve bu alt formülün yerine G' koyarak K^* formülü, (4 numaralı Teoremdeki gibi) elde ediliyorsa, o zaman K formününden K^* çıkar.

D_1 dizgesinin tam olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için, ilk olarak, her formülün *tikel-evetlemeli normal biçimi* olduğunu gözlemleyeceğiz.

Tikel-evetlemeli normal biçim, en iyi örneklerden anlanlaşılır. $P \lor Q \Rightarrow R$ ve $(P \Rightarrow R) \land (Q \Rightarrow R)$ formüllerinin doğruluk tabloları, birbiriyle aynıdır, ve bu ortak tablo, yukarıdaki 4.1 numaralı Şekildedir. Dolayısıyla bu formüllerin tikel-evetlemeli normal biçimleri birbiriyle aynıdır ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land R)&\\ \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R)&.\end{aligned}$$

Bu önermeyi anlamak için, 9.1 numaralı Şekle bakın.

Genellikle, F, bir önerme formülü olsun, ve onun önerme değişkenleri, P_1, $\dots$, P_n olsun. d, bir doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$(d(P_1), \dots, d(P_n))$$

listesi için, 2^n tane seçenek var. Bir m için, m ve sadece m tane seçenek için, $d(F) = 1$. O seçenekler,

$$(e_1^1, \dots, e_n^1), \qquad \dots, \qquad (e_1^m, \dots, e_n^m)$$

P	0	1	0	1	0	1	0	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	0	0	0	1	1	1	1
$P \lor Q \Rightarrow R$	1	0	0	0	1	1	1	1
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \land \neg Q \land R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \land \neg Q \land R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$\neg P \land Q \land R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \land Q \land R$	0	0	0	0	0	0	0	1

Şekil 9.1: $P \lor Q \Rightarrow R$ formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi için doğruluk tabloları

olsun. (Örneğin, $P_1 \lor P_2 \Rightarrow P_3$ için, seçenekler, $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ listeleridir.) $1 \leqslant j \leqslant n$ ve $1 \leqslant i \leqslant m$ varsayalım.

- $e^i_j = 0$ ise P^i_j, $\neg P_j$ formülü olsun;
- $e^i_j = 1$ ise P^i_j, P_j formülü olsun.

Ondan sonra F^i,

$$P^i_1 \land \cdots \land P^i_n$$

tümel-evetlemesi olsun. O zaman

$$F^1 \lor \cdots \lor F^m$$

tikel-evetlemesi, F formülünün **tikel-evetlemeli normal biçimidir.** Yani, F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi,

$$(P^1_1 \land \cdots \land P^1_n) \lor \cdots \lor (P^m_1 \land \cdots \land P^m_n)$$

formülüdür. Bu formülün F formülüne denk olduğu görünebilir.

Burada $m = 0$ olabilir. Bu durumda, F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi, 0 formülüdür.

Bir de $n = 0$ olabilir. Bu durumda, ya F denktir 0 ya da F denktir 1. Sırasıyla F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi, ya 0 ya da 1'dir.

Şimdi aşağıdaki alıştırma kolaylıkla çözülebilir.

Alıştırma 14. Rastgele bir doğruluk tablosu için, doğruluk tablosu o olan bir formülü yazın.

Teorem 17. *Bir $\{F_1, \ldots, F_n\}$ formüller kümesi, bir G formülünü gerektirir, ancak ve ancak $G \vee (F_1 \wedge \cdots F_n)$, G formülüne denktir.*

Kanıt. **Alıştırma 15**. □

Teorem 18. *Biçimsel* D_1 *dizgesi tamdır.*

Kanıt. İlk olarak F, bir totoloji olsun. Sadece Yerine Koyma kuralı kullanarak, F formülünü, tikel-evetlemeli normal F' biçimine getirebiliriz. Tüm adımlar, tersine çevrilebilir; bu şekilde, F' formülünün F formülünü gerektirdiği, D_1 dizgesinin bir teoremidir. Ayrıca, F' formülünün totoloji olduğu, D_1 dizgesinin bir teoremidir. O zaman F formülünün totoloji olduğu, D_1 dizgesinin bir teoremidir.

Şimdi Γ kümesi, F formülünü gerektirsin. 16 numaralı Tıkızlık Teoremine göre, Γ kümesinin bir $\{G_1, \ldots, G_n\}$ altkümesi de F formülünü gerektirir. Bağlama ve Ekleme kuralları sayesinde, bu kümenin $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülünü gerektirdiği, D_1 dizgesinin bir teoremdir. Önceki teoreme göre, F ve $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülleri, birbirine denktir; dolayısıyla, bu formüllerin aynı tikel-evetlemeli normal F' biçimi vardır. $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülünün F' formülünü gerektirdiği, ve F' formülünün F formülünü gerektirdiği, D_1 dizgesinin teoremidir. O zaman Γ kümesinin F formülünü gerektirdiği, D_1 dizgesinin teoremidir. □

9.2 Biçimsel D_2 dizgesi

Bu aşamada yeni simgeler yararlı olacak. Eğer Γ, F formülünü gerektirirse,

$$\Gamma \models F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\models$ simgesine **turnike** denir. Tıkızlık Teoremine göre, $\Gamma \models F$ ise, o zaman Γ kümesinin sonlu bir Γ_0 altkümesi için $\Gamma_0 \models F$ olur. Eğer bir $\Gamma \models F$ gerektirmesi, biçimsel D dizgesinin bir teoremiyse,

$$\Gamma \vdash_D F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\vdash$ simgesi de, bir turnikedir. İstersek, $\models$ simgesine **yorumsal** turnike diyebiliriz; $\vdash$ simgesine **dizimsel** turnike diyebiliriz. Ancak adlar önemli değil. 14 numaralı Teoreme göre

$$\text{her } \Gamma \text{ ve } F \text{ için, } \Gamma \vdash_D F \text{ ise } \Gamma \models F.$$

Ayrıca D dizgesi tamdır ancak ve ancak

$$\text{her } \Gamma \text{ ve } F \text{ için, } \Gamma \models F \text{ ise } \Gamma \vdash_D F.$$

Tam biçimsel bir dizge, D_1 dizgesinden daha basit olabilir. İlk olarak, bir formülün tikel-evetlemeli normal biçimi, sadece $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, ve 1 bağlayıcılarını kullanır. Ayrıca

$$0 \sim \neg 1, \qquad 1 \sim \neg P_1 \vee P_1, \qquad F \wedge G \sim \neg(\neg F \wedge \neg G).$$

Öyleyse her formül, sadece $\vee$ ile $\neg$ bağlayıcılarının kullanıldığı bir formüle denktir. D_2 adlı biçimsel dizge,* sadece bu bağlayıcıları kullanacak. $\Gamma \vdash_{D_2} F$ yerine,

$$\Gamma \vdash_2 F$$

yazalım. D_2 dizgesinin her aksiyomu, $\neg F \vee F$ biçimindedir:

$$\vdash_2 \neg F \vee F.$$

D_2 dizgesinin çıkarım kuralları, aşağıdaki şekillerdedir.

Ekleme: Tüm F ve G formülleri için, F formülünden $G \vee F$ çıkar:

$$F \vdash_2 G \vee F.$$

Daralma: $F \vee F$ formülünden F çıkar:

$$F \vee F \vdash_2 F.$$

Birleşme: $F \vee (G \vee H)$ formülünden $(F \vee G) \vee H$ çıkar:

$$F \vee (G \vee H) \vdash_2 (F \vee G) \vee H.$$

*Bu dizgeyi Shoenfield'den [7] aldım, ama ilk kaynağı, Russell ile Whitehead'dir [10].

Kesme: $F \lor G$ ve $\neg F \lor H$ formüllerinden $G \lor H$ çıkar:

$$F \lor G,\ \neg F \lor H \vdash_2 G \lor H.$$

Teorem 19 (Değişme). *$\Gamma \vdash_2 F \lor G$ ise $\Gamma \vdash_2 G \lor F$.*

Kanıt. Eğer $\Gamma \vdash_2 F \lor G$ ise, o zaman $\vdash_2 \neg F \lor F$ sayesinde Kesme kuralıyla $\Gamma \vdash_2 G \lor F$. □

$F \lor G \lor H$ demek $F \lor (G \lor H)$ olduğunu hatırlayın, onun için

$$F_1 \lor \cdots \lor F_n \text{ demek } F_1 \lor (F_2 \lor \cdots (F_{n-1} \lor F_n) \cdots).$$

Teorem 20 (Genelleştirilmiş Ekleme, Daralma, ve Değişme). *Bir n sayısı için, $F_1, \ldots, F_n$, formüller olsun. Bir m için, her i için, $1 \leqslant i \leqslant m$ ise $1 \leqslant k_i \leqslant n$ sağlayan k_i sayısı seçilsin. O zaman*

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \lor \cdots \lor F_{k_m} \textit{ ise } \Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n.$$

Kanıt. $\boldsymbol{m = 1}$ **durumu.** $1 \leqslant k \leqslant m$ ve $\Gamma \vdash_2 F_k$ varsayıyoruz. O zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_{k+1} \lor \cdots \lor F_n) \lor F_k, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_k \lor F_{k+1} \lor \cdots \lor F_n, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_{k-1} \lor F_k \lor F_{k+1} \lor \cdots \lor F_n, && \text{[Ekleme]}\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_k \lor F_{k+1} \lor \cdots \lor F_n, && \text{[Ekleme]}
\end{aligned}$$

yani $\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n$.

$\boldsymbol{m = 2}$ **durumu.** $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ ve

$$\Gamma \vdash_2 F_i \lor F_j$$

varsayıyoruz. Eğer $i = j$ ise, o zaman Daralmayla $\Gamma \vdash_2 F_i$, ve $m = 1$ durumundan $\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n$. Eğer $j < i$ ise, o zaman Değişmeyle $\Gamma \vdash_2 F_j \lor F_i$. Dolayısıyla $i < j$ varsayabiliriz. O zaman $n \geqslant 2$. $n = 2$ ise, ispatlanacak hiçbir şey yoktur. $k \geqslant 2$ olsun, ve $n = k$ durumunda (ve $m = 2$ durumunda) teoremin ispatlandığını varsayalım. $n = k + 1$ durumunda ispatlayacağız.

- Eğer $i = 1$ ve $j = 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1 \vee F_2, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1) \vee F_2, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 (F_2 \vee F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && \text{[Değişme]}
\end{aligned}$$

- Eğer $i = 1$ ve $j > 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1) \vee F_2, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1 \vee F_2, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && \text{[Değişme]}
\end{aligned}$$

- Eğer $i > 1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee \cdots \vee F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && \text{[Ekleme]}
\end{aligned}$$

***$m > 2$* durumu.** $\ell \geqslant 2$ olsun, ve $m = \ell$ durumunda teoremin ispatlandığını varsayalım. $m = \ell + 1$ durumunda ispatlayacağız. O zaman

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}$$

varsayıyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\Gamma &\vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}, && \text{[Birleşme]}\\
\Gamma &\vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = \ell \text{ durumu}]\\
\Gamma &\vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1} \vee F_{k_2}, && \text{[Değişme]}\\
\Gamma &\vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_{k_2}, && \text{[Birleşme]}\\
\Gamma &\vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = 2 \text{ durumu}]\\
\Gamma &\vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, && \text{[Değişme]}\\
\Gamma &\vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, && \text{[Birleşme]}\\
\Gamma &\vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n)\\
&\qquad \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = 2 \text{ durumu}]\\
\Gamma &\vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Daralma]}\\
\Gamma &\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && \text{[Daralma]} \qquad \square
\end{aligned}$$

P, herhangi bir önerme değişkeni olsun. P ve $\neg P$ formüllerine **harfi** denir.

Teorem 21. *n, bir sayı olsun, ve her k için, $1 \leqslant k \leqslant n$ ise, F_k bir harfi olsun. Eğer*

$$\models F_1 \vee \cdots \vee F_n$$

ise, o zaman $1 \leqslant i \leqslant n$ ile $1 \leqslant j \leqslant n$ koşullarını sağlayan bir i ve j için F_i formülü, $\neg F_j$ formülüdür.

Kanıt. **Alıştırma 16**. $\square$

Teorem 22. *Her n sayısı için, $n \geqslant 2$ ise, ve $\models F_1 \vee \cdots \vee F_n$ ise, o zaman*

$$\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n.$$

Kanıt. $n \geqslant 2$ ve $\models F_1 \vee \cdots \vee F_n$ varsayıyoruz. En basit durumda, her F_k bir harfidir. Bu durumda, 21 numaralı Teoreme göre, bir i ve j için, F_i, $\neg F_j$ formülüdür. O zaman

$$\begin{aligned}
&\vdash_2 F_i \vee F_j, && \text{[aksiyom]}\\
&\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && \text{[Teorem 20]}
\end{aligned}$$

Şimdi, bir k için, F_k formülü harfi olmasın. 20 numaralı Teorem sayesinde, $k = 1$ varsayabiliriz. Üç tane durum var. Her bir durumda, daha basit durumların ispatlandığını varsayabiliriz.

$\boldsymbol{F_1}$**, bir** $\boldsymbol{\neg\neg G}$ **formülüyse,** $\models G \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n$, dolayısıyla

$\vdash_2 G \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[daha basit durum]
$\vdash_2 F_1 \lor \neg G,$	[aksiyom]
$\vdash_2 \neg G \lor F_1,$	[Değişme]
$\vdash_2 (F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor F_1,$	[Kesme]
$\vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n.$	[Değişme]

$\boldsymbol{F_1}$**, bir** $\boldsymbol{\neg(G \lor H)}$ **formülüyse,** $\models \neg G \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n$ ve $\models \neg H \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n$, dolayısıyla

$\vdash_2 \neg G \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[daha basit durum]
$\vdash_2 F_1 \lor G \lor H,$	[aksiyom]
$\vdash_2 G \lor H \lor F_1,$	[Teorem 20]
$\vdash_2 (H \lor F_1) \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[Kesme]
$\vdash_2 (F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor H \lor F_1,$	[Değişme]
$\vdash_2 H \lor (F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor F_1,$	[Teorem 20]
$\vdash_2 \neg H \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[daha basit durum]
$\vdash_2 ((F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor F_1) \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[Kesme]
$\vdash_2 (F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor (F_2 \lor \cdots \lor F_n) \lor F_1,$	[Değişme]
$\vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n.$	[Teorem 20]

$\boldsymbol{F_1}$**, bir** $\boldsymbol{G \lor H}$ **formülüdüyse,** $\models G \lor H \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n$, dolayısıyla

$\vdash_2 G \lor H \lor F_2 \lor \cdots \lor F_n,$	[daha basit durum]
$\vdash_2 F_2 \lor \cdots \lor F_n \lor F_1,$	[Teorem 20]
$\vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n.$	[Teorem 20] $\square$

Teorem 23 (Totoloji)**.** $\models F$ *ise* $\vdash_2 F$.

Kanıt. $\models F$ ise, o zaman

$$\models F \vee F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 F \vee F, && \text{[Teorem 22]} \\ &\vdash_2 F. && \text{[Daralma]} \end{aligned}$$ □

Teorem 24 (Ayırma)**.** *$\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \vee G$ ise $\Gamma \vdash_2 G$.*

Kanıt. $\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \vee G$ varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} &\Gamma \vdash_2 G \vee F, && \text{[Ekleme]} \\ &\Gamma \vdash_2 F \vee G, && \text{[Değişme]} \\ &\Gamma \vdash_2 G \vee G, && \text{[Kesme]} \\ &\Gamma \vdash_2 G. && \text{[Daralma]} \end{aligned}$$ □

Teorem 25 (D_2 dizgesinin tamlığı)**.** *$\Gamma \models F$ ise $\Gamma \vdash_2 F$.*

Kanıt. $\Gamma \models F$ varsayalım. Tıkızlık Teoremi sayesinde Γ kümesinin bir $\{G_1 \dots, G_n\}$ alt kümesi için $\{G_1 \dots, G_n\} \models F$. O zaman

$$\models \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Totoloji Teoremi]} \\ \Gamma &\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \\ \Gamma &\vdash_2 G_1, && \\ \Gamma &\vdash_2 \neg G_2 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Ayırma]} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, && \\ \Gamma &\vdash_2 F. && \end{aligned}$$ □

Kaynakça

[1] Stanley N. Burris, *Logic for mathematics and computer science*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1998.

[2] Alonzo Church, *Introduction to mathematical logic. Vol. I*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956. MR 18,631a

[3] Abdurrahman Demirtaş, *Matematik sözlüğü*, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[4] Teo Grünberg and Adnan Onart, *Mantık terimleri sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[5] Ali Nesin, *Önermeler mantığı*, Bilgi Üniversitesi Yayınları, Ekim 2001.

[6] Proclus, *A commentary on the first book of Euclid's* Elements, Princeton Paperbacks, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992, Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow, Reprint of the 1970 edition, With a foreword by Ian Mueller. MR MR1200456 (93k:01008)

[7] Joseph R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001, reprint of the 1973 second printing. MR MR1809685 (2001h:03003)

[8] Dirk Struik, *Kısa matematik tarihi*, Sarmal Yayınevi, İstanbul, 1996, Türkçesi: Yıldız Silier.

[9] Dirk J. Struik, *A concise history of modern mathematics*, fourth revised ed., Dover, New York, 1987.

[10] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, *Principia mathematica*, vol. I, University Press, Cambridge, 1910.