Lineer Cebir (MAT 114)

Sınav 2

David Pierce, MSGSÜ

12 Mayıs 2017

Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin. Çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin. İyi çalışmalar dilerim!

Problem 1. $V=\{x\in\mathbb{R}\colon x>0\}$ *olsun. Bildiğimiz gibi toplamanın* $(x,y)\mapsto xy$, *skaler çarpmanın* $(t,x)\mapsto x^t$ *olduğu zaman* V *vektör uzayı olur.* $\mathbb{R}^2$ *uzayından* V*'ye giden bir* L *fonksiyonu*

$$L(x,y)=2^{x+y}\cdot 4^{x-y}$$

ile tanımlansın, ve

$$E=\{(1,0),(0,1)\},\qquad\qquad B=\{2\}$$

ile $\mathbb{R}^2$ *uzayının* E *tabanı ve* V*'nin* B *tabanı tanımlansın.*

(a) L*'nin lineer olduğunu gösterin.*

(b) L*'nin* E *ve* B*'ye göre matrisini bulun, yani*

$$\bigl[L(x,y)\bigr]_B=A\bigl[(x,y)\bigr]_E$$

eşitliğini sağlayan A *matrisini bulun.*

Çözüm. (a) Hesaplarız:

$$\begin{aligned}L\bigl((x,y)+(s,t)\bigr)=L(x+s,y+t)&=2^{x+s+y+t}\cdot 4^{x+s-y-t}\\&=2^{x+y}\cdot 4^{x-y}\cdot 2^{s+t}\cdot 4^{s-t}=L(x,y)\cdot L(s,t),\end{aligned}$$

$$L\bigl(t(x,y)\bigr)=L(tx,ty)=2^{tx+ty}\cdot 4^{tx-ty}=2^{x+y^t}\cdot 4^{x-y^t}=L(x,y)^t.$$

(b) $A=\bigl[\bigl[L(1,0)\bigr]_B\quad\bigl[L(0,1)\bigr]_B\bigr]=\bigl[\bigl[2^3\bigr]_B\quad\bigl[2^{-1}\bigr]_B\bigr]=\bigl[3\quad -1\bigr].$

Not.

$$L(x,y)=2^{x+y}\cdot 2^{2x-2y}=2^{3x-y}$$

kuralı da kullanılabilir. Problemde $x\mapsto 2^x$, $\mathbb{R}$'den V'ye giden izomorfizimdir. Ayrıca $(x,y)\mapsto 3x-y$, $\mathbb{R}^2$ uzayından $\mathbb{R}$'ye giden lineer dönüşümdür, dolayısıyla L de lineer dönüşümdür.

Problem 2. $A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,6} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4\,1} & \cdots & a_{4\,6} \end{bmatrix}$ *ve* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ile satırca denk olsun. A'nın sütunları ve satırları için*

$$\boldsymbol{b}_j = (a_{1\,j}, \dots, a_{4\,j}), \qquad \boldsymbol{c}_i = (a_{i\,1}, \dots, a_{i\,6})$$

kısaltmaları kullanılabilir. Sırasıyla A'nın

(a) satır uzayı,

(b) sütun uzayı, ve

(c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ *sıfır uzayı*

için bir taban bulun.

Çözüm. (a) $\{(0, 1, 17, 0, 3, -1), (0, 0, 0, 1, 5, 4)\}$

(b) $\{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\}$

(c) $\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -17, 1, 0, 0, 0), (0, -3, 0, -5, 1, 0), (0, 1, 0, -4, 0, 1)\}$

Not. (c) şıkkında

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 17x_3 & + & 0x_4 & + & 3x_5 & + & -1x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 1x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \end{array}$$

homojen sisteminin çözüm kümesinin bir tabanı aranıyor. Her serbest değişken için tabanın bir elemanı vardır. Serbest değişkenler x_1, x_3, x_5, ve x_6. Cevap kontrol edilebilir.

Problem 3. $\mathbb{R}^4$ *uzayında*

$$\boldsymbol{b}_1 = (2,2,2,-4), \quad \boldsymbol{c}_1 = (1,5,5,-10),$$
$$\boldsymbol{b}_2 = (-1,0,0,0), \quad \boldsymbol{c}_2 = (0,2,0,0), \quad B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\},$$
$$\boldsymbol{b}_3 = (3,2,2,-4), \quad \boldsymbol{c}_3 = (5,6,9,-18), \quad C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$$

olsun. Aşağıdaki vektör uzaylarının her biri için bir taban bulun.

(a) $\langle B\rangle \oplus \langle C\rangle$

(b) $\langle B\rangle + \langle C\rangle$

(c) $\langle B \cup C\rangle / \langle B\rangle$

(d) $\mathbb{R}^n / \langle B \cup C\rangle$

Çözüm. Önce hesaplarız:

$$\left[\ \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ -10 & 0 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-5R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -19 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ \boldsymbol{b}_1 \mid \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{b}_3 \mid \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3 \mid I\ \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -10 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_1+R_4]{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -8 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_2+R_4]{-R_2+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, B'nin gergisinin bir tabanı ve $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$, C'nin gergisinin bir tabanı olduğundan

$$\{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_1), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_2), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_3)\},$$

$\langle B\rangle \oplus \langle C\rangle$ direkt toplamının bir tabanıdır.

(b) $\langle B\rangle + \langle C\rangle$ toplamı, $\left[\ \boldsymbol{b}_1 \mid \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{b}_3 \mid \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3\ \right]$ matrisinin sütun uzayı olduğundan

$$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\},$$

bir tabanıdır.

(c) $\{\boldsymbol{c}_2 + \langle B\rangle\}$

(d) $\{(0,0,1,0) + \langle B \cup C\rangle\}$

Problem 4. *Aşağıda tanımlanan kümelerin biri, $\mathbb{R}^4$ uzayının bir altuzayıdır.*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{s(1,0,1,1) + (0,1,1,-1)\colon s \in \mathbb{R}\},\\
S_2 &= \{s(1,0,1,1) + t(0,1,1,-1)\colon (s,t) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_3 &= \{s(1,0,1,1) + t^2(0,1,1,-1)\colon (s,t) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_4 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\colon {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 0\},\\
S_5 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}.
\end{aligned}$$

Altuzay, V olsun.

(a) Hangi k için $V = S_k$?

(b) V hangi matrisin sıfır uzayıdır? Yani, hangi A matrisi için $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\colon A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$?

Çözüm. (a) $k = 2$ veya 4.

(b) $V = S_2$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_4]{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_4]{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
V &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\colon -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \& \ -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}\\
&= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\colon \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\right\},
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$V = S_4 = \{\mathbf{0}\}$ ise $A = I$ olabilir.