Aksiyomatik Kümeler Kuramı

MAT 340 Finali Çözümleri

David Pierce

16 Ocak 2020

Problem 1. Verilen ordinal işlemler sürekli midir? Kısaca açıklayın.

(a) $\xi \mapsto \omega^{\omega+\xi}$

(b) $\xi \mapsto (\omega+\xi)^\omega$

Çözüm. (a) Süreklidir çünkü

- verilen işlem, $(\eta \mapsto \omega^\eta) \circ (\xi \mapsto \omega+\xi)$ bileşkesidir;
- bileşenlerden her biri süreklidir (çünkü normaldir).

(b) Sürekli değildir çünkü artandır ama (örneğin)

$$\sup_{\xi<\omega^\omega} (\omega+\xi)^\omega = \sup_{x<\omega} (\omega^x)^\omega = \omega^\omega < \omega^{\omega^2} = (\omega+\omega^\omega)^\omega.$$

Problem 2. k ve n doğal sayısı için $(\omega+n)^k$ kuvvetinin Cantor normal biçimini bulun.

Çözüm. $(\omega+n)^0 = 1$, $(\omega+n)^1 = \omega+n$,

$$(\omega+n)^2 = (\omega+n)\cdot\omega + (\omega+n)\cdot n = \omega^2 + \omega\cdot n + n,$$

$$\begin{aligned}(\omega+n)^3 &= (\omega^2+\omega\cdot n+n)\cdot\omega + (\omega^2+\omega\cdot n+n)\cdot n\\ &= \omega^3+\omega^2\cdot n+\omega\cdot n+n,\end{aligned}$$

ve genelde $\boxed{(\omega+n)^k = \omega^k + \omega^{k-1}\cdot n + \cdots + \omega\cdot n + n.}$

Problem 3. Aşağıdaki kanıtın tüm yanlış adımlarını gösterin.

İlk olarak

$$\begin{aligned}0\cdot(\beta+\gamma) &= 0 && (1)\\ &= 0+0 && (2)\\ &= 0\cdot\beta + 0\cdot\gamma. && (3)\end{aligned}$$

Ayrıca eğer

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \qquad (4)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}\alpha'\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma) && (5)\\ &= (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+(\beta+\gamma) && (6)\\ &= (\alpha\cdot\beta+\beta)+(\alpha\cdot\gamma+\gamma) && (7)\\ &= \alpha'\cdot\beta+\alpha'\cdot\gamma. && (8)\end{aligned}$$

Son olarak α limit olduğunda

$$\forall\xi\ \big(\xi<\alpha \Rightarrow \xi\cdot(\beta+\gamma) = \xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\big) \qquad (9)$$

ise, o zaman

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \sup_{\xi<\alpha}\big(\xi\cdot(\beta+\gamma)\big) \qquad (10)$$

$$= \sup_{\xi<\alpha}\big(\xi \cdot \beta + \xi \cdot \gamma\big) \tag{11}$$

$$= \sup_{\xi<\alpha}(\xi \cdot \beta) + \sup_{\xi<\alpha}(\xi \cdot \gamma) \tag{12}$$

$$= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{13}$$

Böylece her α, β, ve γ için

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{14}$$

Çözüm. (5), (7), (8), (10), (12), ve (13) yanlıştır.

Problem 4. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Çözüm. İlk olarak

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + 0) &= \alpha \cdot \beta && \text{[tanım]}\\
&= \alpha \cdot \beta + 0 && \text{[tanım]}\\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0. && \text{[tanım]}
\end{aligned}$$

Ayrıca $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' && \text{[tanım]}\\
&= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha && \text{[tanım]}\\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha && \text{[varsayım]}\\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) && \text{[birleşmelilik]}\\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'. && \text{[tanım]}
\end{aligned}$$

Son olarak γ limit olduğunda

$$\forall \xi\ \big(\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi\big)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot\sup_{\xi<\gamma}(\beta+\xi) && \text{[tanım]}\\
&= \sup_{\xi<\gamma}\bigl(\alpha\cdot(\beta+\xi)\bigr) && \text{[normallik]}\\
&= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) && \text{[varsayım]}\\
&= \alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi) && \text{[normallik]}\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. && \text{[tanım]}
\end{aligned}$$

Problem 5. Çözün.

(a) $(\aleph_\omega \oplus \aleph_\xi) \otimes \aleph_\omega = \aleph_{\omega^2}$

(b) $\xi + \omega^\omega + \eta = \omega + \omega^\omega + \omega$

Çözüm. (a) $\xi = \omega^2$.

(b) $\xi < \omega^\omega$ ve $\eta = \omega$.

Problem 6. Aşağıdaki kümelerin kardinallerini, $\aleph_\alpha$ veya $\beth_\alpha$ biçiminde yazın.

(a) $\mathscr{P}\bigl(\mathscr{P}(\mathbb{R})\bigr)$

(b) $\sup\left\{\beth_5, (\beth_5)^{\beth_5}, (\beth_5)^{(\beth_5)^{\beth_5}}, (\beth_5)^{(\beth_5)^{(\beth_5)^{\beth_5}}}, \dots\right\}$

Çözüm. (a) $\mathscr{P}\bigl(\mathscr{P}(\mathbb{R})\bigr) \approx \mathscr{P}\Bigl(\mathscr{P}\bigl(\mathscr{P}(\omega)\bigr)\Bigr) \approx 2^{2^{2^{\aleph_0}}} = \beth_3$.

(b) Sonsuz κ için $\kappa^\kappa = 2^\kappa$, dolayısıyla verilen küme

$$\{\beth_5, \beth_6, \beth_7, \beth_8, \dots\}$$

olur ve supremumu $\beth_\omega$ olur.