Ordinal Analiz

Aksiyomatik Kümeler Kuramı Dersi

David Pierce

22 Şubat 2018

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Şekil Listesi

1. Gerçel Analiz

1.1. Tam sıralı cisim aksiyomları

Gerçel sayılar, $\mathbb{R}$ **tam sıralı cismini** oluşturur. Demek ki

1) $\mathbb{R}$, $<$ bağıntısı tarafından **sıralanmıştır,** yani

   a) $<$ bağıntısı **yansımasızdır,**

$$a \not< a;$$

   b) $<$ bağıntısı **geçişlidir,**

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c;$$

2) $<$ sıralaması **doğrusaldır,**

$$a < b \vee a = b \vee a > b;$$

3) $<$ doğrusal sıralaması **tamdır,** yani $\mathbb{R}$'nin boş olmayan, üstsınırı olan her altkümesinin en küçük üstsınırı veya **supremumu** vardır:

$$\begin{gathered}\exists x\ x \in A \wedge \exists x\ \forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant x) \Rightarrow \\ \exists x\ \Big(\forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant x) \wedge \\ \forall z\ \big(\forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z\big)\Big);\end{gathered}$$

4) $\mathbb{R}$, iki-konumlu **toplama** ve **çarpma** işlemleri altında kapalıdır, ve bu işlemler ile $\mathbb{R}$ bir **cisimdir,** yani

$$\begin{aligned} a+b&=b+a, & ab&=ba,\\ a+0&=a, & a\cdot 1&=a,\\ -a+a&=0, & a\neq 0&\Rightarrow \exists x\ ax=1,\\ &a\cdot(b+c)=ab+ac; \end{aligned}$$

5) $\mathbb{R}$'nin sıralaması ve cisim yapısı birbirine saygı gösterir:

$$a\leqslant 0\Leftrightarrow -a\geqslant 0,$$
$$a>0\wedge b>0\Rightarrow a+b>0\wedge ab>0.$$

Her iki tam sıralı cismin birbirine izomorf olduğunu, teorem olarak kanıtlayabiliriz.

1.2. Gerçel sayıların inşası

Gerçel analizdeki gibi, bu bölümde $\mathbb{R}$'nin var olduğunu, aksiyom olarak kabul ediyoruz. Fakat *küme aksiyomlarını* kullanarak gerçel sayıları inşa edebiliriz. Kısaca

1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar sıralı cisminden elde edilir,
2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar sıralı halkasından elde edilir,
3) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ sayma sayıları yapısından elde edilir.

Yukarıdaki inşalar, aşağıdaki şekilde yapılır.

1. Her gerçel sayı, öyle bir A kümesi olur ki
   a) $\varnothing\subset A\subset\mathbb{Q}$, yani A boş değildir, A'nın elemanları kesirli sayıdırlar, ve her kesirli sayı A'nın elemanı değildir;
   b) $\forall x\ \forall y\ (x\in A\wedge y\in\mathbb{Q}\wedge y<x\Rightarrow y\in A)$, yani A'nın bir elemanından küçük olan her kesirli sayı A'nın elemanıdır; ve

c) $\forall x\ \exists y\ (x \in A \Rightarrow y \in A \wedge x < y)$, yani A'nın en büyük elemanı yoktur.
2. Her a/b kesirli sayısı, $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) \colon ay = bx\}$ kümesi olarak tanımlanır.
3. Benzer şekilde her tamsayı, bazı a ve b sayma sayıları için $a - b$ biçiminde yazılabilir, ve tamsayının kendisi $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon a + y = b + x\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Burada $\mathbb{N}$ yapısının özelliklerini, *Peano Aksiyomlarından* türetebiliriz, ve ondan sonra $\mathbb{R}$'nin tam sıralı bir cisim olduğunu, teorem olarak kanıtlayabiliriz.

Peano Aksiyomlarını kullanmadan $\mathbb{N}$, sıfır olmayan sonlu olan *ordinal sayılar* tarafından oluşturulabilir. Bölüm 2'de ordinallerin özelliklerini, aksiyom olarak vereceğiz. Bölüm 3'te her ordinali bir küme olarak tanımlayacağız, ve ordinallerin *ordinal aksiyomları* sağladığını teorem olarak kanıtlayacağız. Bu şekilde gerçel analizi, kümeler kuramında temelleştirebiliriz. Ayrıca gerşl analizin ve ordinal analizin bazı ortak özellikleri olacaktır.

1.3. Sayma sayıları

Şimdilik, tam tersine, gerçel sayıların yukarıdaki aksiyomlarını varsayarak $\mathbb{N}$ yapısını elde edeceğiz.

$\mathbb{R}$'nin her A altkümesi için,

1) $1 \in A$ ve
2) A'nın her b elemanı için $b + 1 \in A$

durumunda A'ya **tümevarımlı** densin. O zaman tanıma göre

$$\mathbb{N} = \bigcap\{X \subseteq \mathbb{R} \colon X \text{ tümevarımlıdır}\}$$

olsun. Bu şekilde **sayma sayısı** olmak için gerek ve yeter koşul, $\mathbb{R}$'nin her tümevarımlı altkümesinin elemanı olmaktır. Genelde elemanları küme olan her $\mathscr{B}$ kümesi için

$$\bigcap \mathscr{B} = \{x \colon \forall Y\ (Y \in \mathscr{B} \Rightarrow x \in Y)\}.$$

Bu yeni küme, B'nin **kesişimidir.** Özel olarak

$$C \cap D = \bigcap \{C, D\}.$$

Ayrıca

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap \{A_i \colon i \in \mathbb{N}\}.$$

Teorem 1 (Tümevarım)**.** $\mathbb{N}$ *tümevarımlıdır. Ayrıca* $\mathbb{N}$*'nin tek tümevarımlı altkümesi, kendisidir.*

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Bu teoreme göre tümevarımlı kanıtlar yapılabilir. Yani $\mathbb{N}$'nin herhangi A altkümesi için

1) $1 \in A$ ve
2) $b \in A \Rightarrow b + 1 \in A$

ise, o zaman tümevarımdan $A = \mathbb{N}$. Bu kanıtta $b \in A$ varsayımı, kanıtın **tümevarım hipotezidir.**

Lemma 1. *Her sayma sayısı, ya* 1*'dir, ya da bir* k *sayma sayısı için* $k + 1$*'dir.*

Alıştırma 2. Lemmayı kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Her a gerçel sayısı, $(a-1)+1$ biçiminde yazılabilir, ama a'nın sayma sayısı olduğunda bile $a - 1$, sayma sayısı olmayabilir.

Lemma 2. $\mathbb{N}$ *doğrusal sıralıdır, ve her* k *elemanı için*

$$k < k + 1.$$

Ayrıca

$$k < \ell \Rightarrow k + 1 < \ell + 1.$$

Alıştırma 3. Lemmayı kanıtlayın. ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'den bazı özellikleri alır.)

Lemma 3. *En küçük sayma sayısı vardır, ve bu sayı* 1*'dir.*

Alıştırma 4. Lemmayı kanıtlayın. (Tümevarım ve Lemma 2'yi kullanın.)

Lemma 4. *Herhangi* k *ve* m *sayma sayıları için*

$$k \leqslant m \Leftrightarrow k < m + 1, \tag{1.1}$$

yani $\{x \in \mathbb{N} \colon x < m\} \cup \{m\} = \{x \in \mathbb{N} \colon x < m + 1\}$.

Alıştırma 5. Lemmayı kanıtlayın. (Lemma 2'den (1.1) denkliği $m < k \Leftrightarrow m + 1 \leqslant k$ biçiminde yazılabilir. Bunun bir yönü apaçıktır. Diğer yön k üzerinde tümevarım, Lemmalar 1, 2, ve 3 ile kanıtlanabilir.)

Teorem 2 (Güçlu tümevarım)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ *olsun, ve tüm* k *sayma sayıları için*

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x < k\} \subseteq A \Rightarrow k \in A$$

olsun. O zaman $A = \mathbb{N}$.

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın. ($\bigl\{x \in \mathbb{N} \colon \{y \in \mathbb{N} \colon y < x\} \subseteq A\bigr\}$ kümesi B olsun. Lemmalar 3 ve 4 ve tümevarım ile $B = \mathbb{N}$ olduğunu kanıtlayın.)

Örneğin güçlü tümevarımdan her sayma sayısı ya 1'dir ya da asal bir sayı tarafından bölünür. Zira bu özelliği olan sayma sayıları bir A kümesini oluştursun. Bir m için $k < m$ ise $k \in A$ olsun. Eğer $m = 1$ ise $m \in A$. Eğer m asal ise $m \in A$. Kalan durumda bir k için $1 < k < m$ ve $k \mid m$. (Burada O zaman $k \in A$, ama $k \neq 1$, dolayısıyla bir p asalı için $p \mid k$, ve sonuç olarak $p \mid m$ ve $m \in A$. Güçlü tümevarımdan $A = \mathbb{N}$.

Teorem 3 (İyisıralama). *$\mathbb{N}$ **iyisıralıdır,** yani $\mathbb{N}$'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır.*

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın. ($A \subseteq \mathbb{N}$ olsun, ama A'nın en küçük elemanı olmasın. Güçlü tümevarım ile $\mathbb{N} \smallsetminus A = \mathbb{N}$ kanıtlayın.)

1.4. Göndermeler

Eğer f, tanım kümesi A olan ve değer kümesi B olan bir göndermeyse, bu durum

$$f\colon A \to B$$

cümlesiyle ifade edilebilir. Ayrıca f'nin kendisinin yerine

$$x \mapsto f(x)$$

isimi kullanılabilir; Şekil 1'e, Alıştırma 13'e ve Teorem 22'ye bakın.

Eğer $f\colon A \to B$, $C \subseteq A$, $g\colon C \to B$, ve C'nin her d elemanı $g(d) = f(d)$ ise, o zaman

$$g = f \upharpoonright C;$$

Teorem 10'un kanıtına bakın. Eğer A'dan B'ye giden birebir ve örten gönderme varsa, bu gönderme bir **eşlemedir,** ve verilen kümeler **eşleniktir;** bu durum

$$A \approx B$$

cümlesiye ifade edilir. Teorem 29'a bakın.

Herhangi A ve B kümelerinin **kartezyan çarpımı** vardır. Tanıma göre

$$A \times B = \{(x, y)\colon x \in A \land y \in B\}.$$

Burada
$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$
Eğer $f\colon A \to B$ ise, o zaman f, $A \times B$ çarpımının
$$\big\{\big(x, f(x)\big)\colon x \in A\big\}$$
altkümesini belirtir.

Bir A kümesinde tek-konumlu bir işlem, A'dan kendisine giden bir göndermedir; iki-konumlu bir işlem, $A \times A$ çarpımından A'ya giden bir göndermedir.

Gerçel analiz ve sayılar kuramında tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan göndermeler tanımlanıp kullanılır. Örneğin $x \mapsto x!$ göndermesi için
$$1! = 1, \qquad\qquad (k+1)! = (k+1) \cdot k!$$
özyineli tanımı verilir. Bu tanım neden geçerli midir?

Tanımın geçerliliği için $\mathbb{N}$ tümevarımlı olmalıdır, ama bunu Teorem 1'den biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{N}$, gerçel sayıların çarpması altında kapalı olmalıdır.

Teorem 4. *Tüm a ve b gerçel sayıları için*
$$a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N} \wedge a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $1 \in \mathbb{N}$, ve ayrıca $\mathbb{N}$'nin herhangi k elemanı için eğer $k! \in \mathbb{N}$ ise, o zaman $(k+1) \cdot k! \in \mathbb{N}$. Bu şekilde $x \mapsto x!$ göndermesi tanımlanabilir mi?

- Tümevarım veya güçlü tümevarım ile bir kümenin $\mathbb{N}$ olduğu kanıtlanabilir; ama $\{x \in \mathbb{N}\colon x! \text{ tanımlanır}\}$, iyi tanımlanmış bir küme değildir.

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "x\mapsto x+1"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "g"] \\
\{b\} \arrow[r, "\subseteq"'] & A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.: Özyineleme

- İyisıralama ile $\mathbb{N}$'nin boş olmayan bir altümesinin elemanı bulunabilir; ama $x \mapsto x!$ göndermesi, $\mathbb{N}$'nin bir elemanı değildir.

Başka bir teoreme ihtiyacımız vardır.

Teorem 5 (Özyineleme). *Bir A kümesi için*

1) $b \in A$,

2) $f\colon A \to A$

olsun. O zaman $\mathbb{N}$'den A'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için

1) $g(1) = b$,

2) her k sayma sayısı için $g(k+1) = f(g(k))$.

Şekil 1'e bakın.

Örneğin $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $b = (1, 1)$, ve

$$f(x, y) = \bigl(x + 1, (x + 1) \cdot y\bigr)$$

olsun. O zaman bir ve tek bir g göndermesi için g'nin tanım kümesi $\mathbb{N}$, $g(1) = (1, 1)$, ve $g(k + 1) = f(g(k))$. Şimdi $g(k)$, $(g_1(k), g_2(k))$ olarak yazılsın. Tümevarımdan $g_1(k) = k$. Bundan dolayı

$$g_2(k + 1) = (k + 1) \cdot g_2(k).$$

Ayrıca $g_2(1) = 1$. Böylece $k!$, $g_2(k)$ olarak tanımlanabilir.

Özyineleme Teoremi kanıtı. Bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\mathbb{N}$'nin tek-elemanlı $\{1\}$ altkümesidir, ve
2) $h(1) = b$.

Bu gönderme h_1 olsun.

Tümevarım hipotezi olarak bir m sayma sayısı için, bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\mathbb{N}$'nin m elemanlı $\{1, \ldots, m\}$ altkümesi olsun,
2) $h(1) = b$ olsun, ve
3) $k < m$ ise $h(k+1) = f(h(k))$ olsun.

Bu gönderme h_m olsun. O zaman bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\{1, \ldots, m+1\}$ altkümesidir,
2) $h(1) = b$, ve
3) $k < m+1$ ise $h(k+1) = f(h(k))$.

Zira böyle bir h varsa, o zaman $h \restriction \{1, \ldots, m\}$ ve h_m göndermelerinin özellikleri aynıdır, dolayısıyla h_m göndermesinin biricikliğinden $h \restriction \{1, \ldots, m\} = h_m$. Bu şekilde h'nin tanımı

$$h(x) = \begin{cases} h_m(x), & x \leqslant m \text{ durumunda}, \\ f(h_m(m)), & x = m+1 \text{ durumunda} \end{cases} \tag{1.2}$$

olabilir. Ayrıca $h \restriction \{1, \ldots, m\} = h_m$ olmalıdır, dolayısıyla h'nin kendisi, (1.2) eşitliğini sağlamalıdır. Bu h göndermesi h_{m+1} olsun.

Tümevarımdan, her n sayma sayısı için, $\{1, \ldots, n\}$ kümesinden giden bir be tek bir h_n göndermesi için $h_n(1) = b$ ve $k < n$ ise $h_n(k+1) = f(h_n(k))$. Ayrıca

$$h_{m+1}(m+1) = f(h_m(m)).$$

Şimdi $g(x) = h_x(x)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} g(1) &= h_1(1) = b, \\ g(k+1) &= h_{k+1}(k+1) = f(h_k(k)) = f(g(k)). \end{aligned}$$

Bu şekilde g, istediğimiz gibidir. Bir h göndermesinin istediğimiz özelliği varsa

$$h(1) = b = g(1),$$

ve $h(m) = g(m)$ ise

$$h(m+1) = f(h(m)) = f(g(m)) = g(m+1).$$

Bu şekilde her k sayma sayısı için $h(k) = g(k)$, dolayısıyla $h = g$. □

Bazı yapılarda tümevarım kullanılabilir, ama özyineleme kullanılamaz. Örneğin p asal ise, Fermat Teoremine göre herhangi a tamsayısı için

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{1.3}$$

Tümevarım ile bu teoremi kanıtlayabiliriz, zira $1^p \equiv 1$, ve ayrıca $b^p \equiv b$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} (b+1)^p &= b^p + pb^{p-1} + \binom{p}{2} b^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2} b^2 + pb + 1 \\ &\equiv b^p + 1 \equiv b + 1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

çünkü $0 < k < p$ ise $k \mid \binom{p}{k}$. Neden bu kanıt geçerlidir? Sayılar kuramından

$$\begin{aligned} &a \equiv a_1 \wedge b \equiv b_1 \\ &\qquad \Rightarrow a + b \equiv a_1 + b_1 \wedge ab \equiv a_1 b_1 \pmod{p}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

$\mathbb{Z}_p$, tamsayıların p'ye göre kalandaşlık sınıfları kümesi olsun. Bu şekilde

$$\mathbb{Z}_p = \{[x] \colon x \in \mathbb{Z}\}, \qquad [k] = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv k \pmod p\}.$$

O zaman $\mathbb{Z}_p = \{[1], \dots, [p]\}$. Ayrıca (1.4) gerektirmesine göre

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad\qquad [a][b] = [ab]$$

tanımları geçerlidir, çünkü

$$[a] = [a_1] \land [b] = [b_1] \Rightarrow [a + b] = [a_1 + b_1] \land [ab] = [a_1 b_1].$$

Şimdi $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ ve $[1] \in A$ olsun, ve $[k] \in A$ ise $[k+1] \in A$ olsun. O zaman tümevarımdan $A = \mathbb{Z}_p$. Zira $B = \{x \in \mathbb{N} \colon [x] \in A\}$ olsun. O zaman $1 \in B$, çünkü $[1] \in A$. Ayrıca $k \in B$ ise, o zaman $[k] \in A$, dolayısıyla $[k + 1] \in A$ ve $k + 1 \in B$. Tümevarımdan $B = \mathbb{N}$. Özel olarak $\{1, \dots, p\} \subseteq B$, dolayısıyla $\mathbb{Z}_p = A$.

Yukarıdaki gösterdiğimize göre $[1]^p = [1]$, ve $[b]^p = [b]$ ise $[b+1]^p = [b+1]$. O zaman tümevarımdan her a tamsayısı için $[a]^p = [a]$, yani (1.3) kalandaşlığı doğrudur.

Böylece $\mathbb{Z}_p$ yapısında tümevarım yöntemi geçerlidir; ama özyineleme yöntemi geçerli değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_3$ yapısında hiçbir tek-konumlu g işlemi için

$$g([1]) = [2], \qquad\qquad g([k + 1]) = [k][2]$$

olmaz, çünkü olursa

$$g([2]) = [4] = [1], \qquad g([3]) = [2], \qquad g([4]) = [1],$$

ama $[4] = [1]$ olduğundan $g([4]) = g([1]) = [2]$, ve $[2] \neq [1]$.

Alıştırma 9. Özyineleme Teoreminin yukarıdaki kanıtı, $\mathbb{N}$'nin hangi özelliklerini kullanır?

1.5. Peano Aksiyomları

Özyineleme Teoreminin başka bir kanıtı vardır.

Özyineleme Teoremi ikinci kanıtı. Birinci kanıttaki gibi, istediğimiz özellikleri olan bir gönderme varsa, tek bir örnek vardır.

Şimdi elemanları gönderme olan bir $\mathscr{C}$ kümesini tanımlayacağız. $\mathscr{C}$'nin her h elemanı için,

1) h'nin tanım kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir, ve
2) herhangi ℓ sayma sayısı için, $h(\ell)$ tanımlanırsa, o zaman
   a) ya $\ell = 1$ ve $h(\ell) = b$,
   b) ya da bir k sayma sayısı için $\ell = k+1$, $h(k)$ tanımlanır, ve
   $$h(\ell) = f(h(k)).$$

Lemma 1 sayesinde istediğimiz gibi g göndermesi varsa $\mathscr{C}$'nin elemanıdır. Her k sayma sayısı için, A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$ göstereceğiz. Bu şekilde $g(k) = d$ tanımlanabilir.

Yukarıdaki özelliği olan k sayma sayıları, E kümesini oluştursun. Tanım kümesi $\{1\}$ olan bir h göndermesi için $h(1) = b$. O zaman $h \in \mathscr{C}$. Ayrıca $\mathscr{C}$'nin herhangi h elemanı için $h(1)$ tanımlanırsa, o zaman $h(1) = b$ olmalıdır, çünkü hiç k sayma sayısı için $k + 1 = 1$ değildir. Bu şekilde $1 \in E$.

Şimdi $k \in E$ olsun. O zaman A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$.

1. Eğer $h(k+1)$ tanımlanırsa, o zaman $\mathscr{C}$'nin tanımına göre $h(k+1) = f(d)$, çünkü $k+1 \neq 1$, ve ayrıca herhangi ℓ sayma sayısı için eğer $\ell + 1 = k + 1$ ise, o zaman $\ell = k$.
2. Eğer $h(k+1)$ tanımlanmazsa, o zaman yeni bir h^* gön-

dermesi için

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{eğer } h(x) \text{ tanımlanırsa,} \\ f(d), & \text{eğer } x = k+1. \end{cases}$$

O zaman $h^* \in \mathscr{C}$ ve $h^*(k+1) = f(d)$.
Bu şekilde, her durumda, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = f(d)$.

Mümkümse $d^* \in A$, $d^* \neq f(d)$ olsun, ama $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = d^*$ olsun. O zaman $k+1 \neq 1$ olduğundan bir ℓ sayma sayısı için $\ell + 1 = k + 1$, $h(\ell)$ tanımlanır, ve $d^* = f(h(\ell))$. Ama bu durumda $\ell = k$, dolayısıyla $h(\ell) = d$ ve $d^* = f(d)$.

Sonuç olarak $k+1 \in E$. Tümevarım ile $E = \mathbb{N}$. □

Yukarıdaki kanıt, sadece $\mathbb{N}$'nin aşağıdaki özelliklerini kullanır:

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $k \in \mathbb{N}$ ise $k+1 \in \mathbb{N}$.
3. Tümevarım yöntemi geçerlidir.
4. Her k sayma sayısı için $1 \neq k+1$.
5. Tüm k ve ℓ sayma sayıları için $k+1 = \ell+1$ ise $k = \ell$.

Bu özelliklere **Peano Aksiyomları** denir. Peano Aksiyomları, $\mathbb{N}$'de iki-konumlu toplama işleminin tanımlandığını varsaymaz; sadece tek-konumlu $x \mapsto x+1$ işlemi vardır. Ama özyineleme yöntemiyle $\mathbb{N}$'de toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz:

$$a + (b+1) = (a+b) + 1, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot (b+1) = ab + a.$$

Tümevarım ve kalan Peano Aksiyomları ile toplamanın ve çarpmanın özelliklerini kanıtlayabiliriz; ayrıca $\mathbb{N}$'nin sıralamasını tanımlayıp özelliklerini kanıtlayabiliriz. Ondan sonra yukarıdaki gibi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yapılarını elde edebiliriz.

Tam tersine tam sıralı cisim aksiyomlarını kullanarak $\mathbb{N}$ yapısını inşa ettik ve onun Peano Aksiyomlarını sağladığını teorem olarak kanıtladık. (Teorem 1 ve Lemmalar 2 ve 3'e bakın.)

Sayma sayılarına sıfırı ekleyerek doğal sayıları elde ederiz. Doğal sayılar, *sonlu ordinallerdir.* Sonsuz ordinaller de vardır. Ordinallerin aksiyomlarını kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayayıp özelliklerini kanıtlayacağız. Ondan sonra küme aksiyomlarını kullanarak ordinalleri inşa edeceğiz. Bu şekilde bildiğimiz tüm matematik, küme aksiyomları tarafından gerektirilir.

2. Ordinal sayılar

Kümeler kuramımızda her kümenin her elemanı, bir küme olacaktır. (Bu şekilde "elemanları küme olan küme" ifadesi gereksiz kılınacaktır.) Bir küme boş olacaktır, ve bu küme,

$$\varnothing$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$0 = \varnothing \tag{2.1}$$

tanımlayacağız. Herhangi a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\} \tag{2.2}$$

tanımlayacağız. Ayrıca

$$1 = 0', \qquad 2 = 1', \qquad 3 = 2', \qquad 4 = 3', \qquad \dots \tag{2.3}$$

olacaktır. O zaman $0, 1, 2, 3, \dots$, **doğal sayı** olacaklardır. Doğal sayılar, sonlu **ordinal** olacaklardır, ama sonsuz ordinaller de var olacaktır. Örneğin

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{2.4}$$

ve ω, en küçük sonsuz ordinal olacaktır.

Şimdilik (2.1), (2.2), ve (2.4) tanımlarını kullanmayacağız. Bölüm 3'te, küme aksiyomlarını kullanarak, ordinalleri tanımlayıp özelliklerini teorem olarak kanıtlayacağız; ama şimdilik ordinallerın aşağıda verilen özelliklerini aksiyom olarak kabul edeceğiz.

2.1. Kümeler ve sınıflar

Ordinaller bir

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluşturacaktır. Biz zaten $\mathbb{Z}_p$ yapısını tanımlamak için *denklik sınıfları* kullandık. Normalde bir denklik sınıfı bir kümedir. Aslında her küme bir sınıftır, ama her sınıf bir küme değildir.

Her sınıf *tek serbest değişkeni olan bir formül* tarafından tanımlanır. Örneğin birazdan kullanacağımız

$$\begin{gathered} x \in a, \\ x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}, \\ x \in c \Leftrightarrow x \in d, \\ x \notin x \end{gathered}$$

ifadeleri, serbest değişkeni x olan formüldürler. (Formüllerin resmi tanımı için, B Eki'ne bakın.) Eğer φ, tek serbest değişkeni olan bir formül ise, o zaman φ'nin tanımladığı sınıfın elemanları, φ'yi sağlayan kümelerdir, ve sınıfın kendisi

$$\{x \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılabilir. Sınıflar büyük siyah harfler de ile göstereceğiz. Küçük harfler her zaman küme olacaktır. Örnegin

$$\boldsymbol{A} = \{x \colon \varphi(x)\}$$

ise, o zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \varphi(b).$$

Her küme bir sınıfa eşittir. Özel olarak her a kümesi için

$$a = \{x \colon x \in a\}.$$

Genelde elemanları aynı olan sınıflar ve kümeler eşittir:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$c = d \Leftrightarrow \forall x\ (x \in c \Leftrightarrow x \in d).$$

Teorem 6 (Russell Paradoksu)**.** *Her sınıf bir kümeye eşit değildir. Örneğin $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı bir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. $x \notin x$ formülü $\varphi(x)$ olarak yazılsın. Eğer $\{x\colon \varphi(x)\} = a$ ise, o zaman her b kümesi için

$$b \in a \Leftrightarrow \varphi(b).$$

Özel olarak $a \in a \Leftrightarrow \varphi(a)$, yani

$$a \in a \Leftrightarrow a \notin a;$$

ama bu bir çelişkidir. Bu şekilde $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, bir a kümesine eşit olamaz. □

Öklid'de eşitlik, aynılık değildir. İkizkenar bir üçgenin iki eşit kenarı vardır. Bu kenarlar iki olduğundan birbiriyle aynı değildir. Ama eşit sınıflar aynı olarak düşünülebilir.

2.2. Ordinallerin özellikleri

Küçük Yunan harfleri her zaman ordinal gösterecektir. Özel olarak α, β, γ, δ, ve θ, sabit ordinaldirler, ama ξ, η, ve ζ, ordinal değişkendirler. Örnegin

$$\{\xi\colon \varphi(\xi)\} = \{\eta\colon \varphi(\eta)\} = \{\zeta\colon \varphi(\zeta)\} = \{x\colon x \in \mathbf{ON} \land \varphi(x)\}.$$

Şimdilik aksiyom olarak kabul edeceğimiz **ON**'nin özellikleri aşağıdadır.

1. En az bir ordinal vardır.

2. **ON** iyisıralıdır.

3. Her ordinal için, daha büyük ordinal vardır.

4. **ON**'nin herhangi altkümesinin **ON**'de olan üstsınırı vardır.

5. Herhangi α için $\{\xi\colon \xi < \alpha\}$ sınıfı bir kümedir.

6. Herhangi $\boldsymbol{F}$ tek-konumlu ordinal işlemi için, herhangi α için $\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$ sınıfı bir kümedir.

7. Bir α için $\{\xi\colon \xi < \alpha\}$ kümesi sonsuzdur.

Aslında her α ordinali, $\{\xi\colon \xi < \alpha\}$ kümesinin kendisi olarak tanımlanabilecektir; ama şimdilik bu tanımı kullanmayıp sadece yukarıdaki yedi özelliği kullanacağız.

Teorem 7 (Burali-Forti Paradoksu)**. ON** *küme değildir.*

Kanıt. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan **ON**'nin en büyük elemanı yoktur, dolayısıyla **ON**'nin **ON**'de olan üstsınırı yoktur. **ON**'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan **ON**'nin kendisi küme olamaz. □

Şimdi 0, en küçük ordinal olarak tanımlansın, ve herhangi α ordinali için

$$\alpha' = \min\{\xi\colon \alpha < \xi\} \tag{2.5}$$

tanımlansın. Bu şekilde α', α'nın **ardılı,** yani α'dan büyük olan ordinallerin en küçüğüdür. Şimdi yukarıdaki (2.3) tanımlarını kullanabiliriz. Ne sıfır ne bir ardıl olan ordinal, bir **limittir.**

Teorem 8. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $\{\xi\colon \xi < \alpha\}$ kümesi sonlu ise, α'ya da **sonlu** densin; diğer durumda, **sonsuz.** O zaman en küçük sonsuz ordinal bir limittir, ve her limit ordinali sonsuzdur. En küçük limit

$$\omega$$

olsun. O zaman $\{\xi\colon \xi < \omega\}$, doğal sayılar kümesidir.

Teorem 9 (Ordinal Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$*,*

2) Her β için

$$\beta \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \beta' \in \boldsymbol{A},$$

3) her γ limiti için

$$\{\xi\colon \xi < \gamma\} \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \gamma \in \boldsymbol{A}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Verilen koşullar altında $\mathbf{ON} \setminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. Zira mümkümse $\alpha = \min(\mathbf{ON} \setminus \boldsymbol{A})$ olsun.

1. $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

2. $\alpha = \beta'$ ise $\beta < \alpha$ olduğundan $\beta \in \boldsymbol{A}$, ama bu durumda $\beta' \in \boldsymbol{A}$, yani $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

3. Varsayımımıza göre $\beta < \alpha$ ise $\beta \in \boldsymbol{A}$. Bu şekilde

$$\{\xi\colon \xi < \alpha\} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

Eğer α bir limit ise, o zaman α da $\boldsymbol{A}$'nın elemanı olmalıdır.

Bu şekilde her ordinal ya 0, ya bir ardıl, ya da bir limit olduğundan $\alpha \in \boldsymbol{A}$, ama $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ varsayımına göre $\alpha \notin \boldsymbol{A}$. Öyleyse varsayım imkânsızdır. **ON**'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı var olduğundan $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A} = \varnothing$, dolayısıyla $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$. □

Ordinal tümevarım ile Teorem 10'u, Teorem 12'yi, Teorem 21'i, ve daha sonraki teoremler kanıtlayacağız. Ordinal tümevarım kullanılan bir kanıtın üç adımı vardır:

1) sıfır adımı,
2) ardıl adımı, ve
3) limit adımı.

Ayrıca kanıtta iki tümevarım hipotezi vardır. Ordinal Tümevarım Teoremini yazarken kullandığımız harflerde,

- ardıl adımının hipotezi, $\beta \in \boldsymbol{A}$;
- limit adımının hipotezi, $\{\xi \colon \xi < \gamma\} \subseteq \boldsymbol{A}$, yani

$$\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \boldsymbol{A}).$$

Teorem 10 (Ordinal Özyineleme)**.** *Varsayımlarımız,*

1) $\theta \in \mathbf{ON}$*,*
2) $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$*.*

O zaman bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *ordinal işlemi için*

1) $\boldsymbol{H}(0) = \theta$*,*
2) her β *ordinali için* $\boldsymbol{H}(\beta') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\beta))$*,*
3) her γ *limiti için* $\boldsymbol{H}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{H}(\xi) \colon \xi < \gamma\}$*.*

Kanıt. Her α için, tanım kümesi $\{\xi \colon \xi \leqslant \alpha\}$ olan bir ve tek bir h_α göndermesi için,

1) $h_\alpha(0) = \theta$,
2) $\beta < \alpha$ ise $h_\alpha(\beta') = \boldsymbol{F}(h_\alpha(\beta))$,
3) $\gamma \leqslant \alpha$ ve limit ise $h_\alpha(\gamma) = \sup\{h_\alpha(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Bunu kanıtlamak için, ordinal tümevarım kullanacağız.

1. h_0, $h_0(0) = \theta$ ile tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. Yani $\alpha = 0$ durumunda iddia doğrudur.

2. Eğer $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğru ise $h_{\delta'}$,

$$h_{\delta'}(\xi) = \begin{cases} h_\delta(\xi), & \xi \leqslant \delta \text{ durumunda,} \\ \boldsymbol{F}(h_\delta(\delta)), & \xi = \delta' \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir. Ayrıca $h_{\delta'}$ bu şekilde tanımlanmalıdır, çünkü hipoteze göre

$$h_{\delta'} \upharpoonright \{\xi \colon \xi \leqslant \delta\} = h_\delta$$

olmalıdır. Bundan dolayı $\alpha = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde bir δ için $\alpha < \delta$ durumlarında iddia doğru ise, o zaman $\alpha < \beta < \delta$ durumlarında $h_\alpha(\alpha) = h_\beta(\alpha)$. Eğer ayrıca δ bir limit ise, o zaman h_δ,

$$h_\delta(\xi) = \begin{cases} h_\xi(\xi), & \xi < \delta \text{ durumunda,} \\ \sup\{h_\xi(\xi) \colon \xi < \delta\}, & \xi = \delta \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır, ve bu şekilde $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğrudur.

Ordinal tümevarımımız bitti. Şimdi $\boldsymbol{H}(\xi) = h_\xi(\xi)$ tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. □

Bölümler 4, 5, ve 6'da ordinal özyinelemeyle ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma işlemlerini tanımlayacağız.

2.3. Normal işlemler

Şimdi $\boldsymbol{F}$, herhangi tek-konumlu ordinal işlem olsun. Ordinal aksiyomarına göre $\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\}$ sınıfı her zaman bir kümedir, ve bu kümenin üstsınırı vardır. Ayrıca ordinaller iyisıralanmış olduğundan $\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\}$ kümesinin üstsınırlarının en küçüğü vardır, yani kümenin **supremumu** vardır. Bu supremum,

$$\sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}, \qquad\qquad \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi)$$

şekillerinde yazılabilir.

Teorem 11. *Her α ordinali için*

$$\sup\{\xi\colon \xi < \alpha\} = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \textit{ durumunda}, \\ \beta, & \alpha = \beta' \textit{ durumunda}, \\ \alpha, & \alpha\textit{'nın limit olduğu durumda.} \end{cases}$$

Alıştırma 11. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 12. $\{\xi'\colon \xi < \alpha\}$ kümesinin supremumunu hesaplayın.

Eğer

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \leqslant \boldsymbol{F}(\beta)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **artandır.** Eğer

$$\alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\beta) \tag{2.6}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **kesin artandır.** Eğer
1) $\boldsymbol{F}$ kesin artan ve
2) her α limiti için $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$
ise, o zaman $\boldsymbol{F}$'ye **normal** densin.

Alıştırma 13. $\xi \mapsto \xi'$ işleminin kesin artan olup normal olmadığını gösterin.

Alıştırma 14. Normal olan bir işlem örneği verin.

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 22'nin kanıtında olacaktır.

Teorem 12. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) her α *için* $\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha')$ *ve*

2) her α *limiti için* $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ *normaldir.*

Kanıt. $\boldsymbol{F}$'nin kesin artan olduğunu göstermek yeter. (2.6) gerektirmesini β üzerinden tümevarım kullanarak kanıtlayacağız.

1. $\beta = 0$ ise, (2.6) iddiası doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\alpha < 0$ değildir.

2. $\beta = \gamma$ durumda (2.6) iddia doğru olsun. Eğer $\alpha < \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \leqslant \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &\leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) && \text{[tümevarım hipotezi]} \\ &< \boldsymbol{F}(\gamma'). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

3. γ limit ve $\alpha < \gamma$ ise, o zaman $\alpha < \alpha' < \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &< \boldsymbol{F}(\alpha') && \text{[varsayım]} \\ &\leqslant \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \gamma\} && \text{[supremumun tanımı]} \\ &= \boldsymbol{F}(\gamma). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

(Bu adımda bir tümevarım hipotezi kullanılmıyor.) □

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 23'ün kanıtında olacaktır.

Teorem 13. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve normal olsun. O zaman* **ON***'nin boş olmayan her* A *altkümesi için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(A)) = \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.7}$$

Kanıt. A kümesinin supremumu α olsun. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\beta \in A$ ise $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha)$. Bundan dolayı, eğer $\alpha \in A$ ise, o zaman

$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) = F(\alpha),$$

yani (2.7) doğrudur. Şimdi $\alpha \notin A$ olsun. O zaman α ardıl olamaz. A boş olmadığından $\alpha = 0$ olamaz, dolayısıyla α limittir. Bu durumda $\boldsymbol{F}$ normal olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.8}$$

Ayrıca

$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi), \tag{2.9}$$

çünkü $A \subseteq \{\xi \colon \xi < \alpha\}$. Eğer $\beta < \alpha$ ise, A'nın bir γ elemanı için $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi)$. Bu şekilde

$$\sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.10}$$

Sonuç olarak (2.8), (2.9), ve (2.10) beraber (2.7) eşitliğini tekrar gerektirir. □

2.4. Süreklilik

Normallik kavramının yerine gerçel analizden gelen süreklilik kavramını kullanabiliriz. Ordinallerde, kesin artan bir işlemin normal olması için gerek ve yeter bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır. Bu sonucu kurmak, bu altbölümün işidir.

Tekrar $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Varsa, $\boldsymbol{F}$'nin bir noktadaki sürekliliği gerçel analizdeki gibi tanımlanır. Aslında eğer

$$\beta < \boldsymbol{F}(\alpha) < \gamma$$

koşulunu sağlayan herhangi β ve γ için, bazı δ ve θ için,

$$\delta < \alpha < \theta \wedge \forall\xi\ (\delta < \xi < \theta \Rightarrow \beta < \boldsymbol{F}(\xi) < \gamma)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, α'da **süreklidir.** Eğer $\boldsymbol{F}(\alpha) = 0$ veya $\alpha = 0$ ise, o zaman $\beta = -1$ veya $\delta = -1$ olabilir. Benzer şekilde **soldan** ve **sağdan** olan süreklilik tanımlanabilir.

Lemma 5. **ON**'*de her tek-konumlu işlem, limit olmayan her noktada süreklidir ve her noktada sağdan süreklidir.*

Alıştırma 15. Lemmayı kanıtlayın.

Gerçel analizdeki gibi $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ ise

$$\limsup_{\xi\to\alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \min\left\{\sup_{\eta<\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi)\colon \eta < \alpha\right\}$$

tanımını yaparız.

Lemma 6. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve artan ise*

$$\limsup_{\xi\to\alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi).$$

Alıştırma 16. Lemmayı kanıtlayın.

Lemma 7. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun.* $\boldsymbol{F}$ *bir* α *limitinde süreklidir ancak ve ancak*

$$\limsup_{\xi\to\alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Alıştırma 17. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 14. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve kesin artan olsun. O zaman* $\boldsymbol{F}$ *normaldir ancak ve ancak her noktada süreklidir.*

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 19. Sürekli olup normal olmayan bir işlem örneği verin.

3. Küme aksiyomları

Bu bölümde **ON**'nin sayfa 21'deki özelliklerini ve

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\} \tag{3.1}$$

tanımlama imkânını, küme aksiyomlarından elde edeceğiz. Bölümler 4, 5, ve 6'da sadece (3.1) eşitliğini kullanacağız.

3.1. Ordinaller varsa

Tanıma göre

$$\varnothing = \{x \colon x \in x \land x \notin x\},$$
$$a \cup \{b\} = \{x \colon x \in a \lor x = b\}.$$

AKSİYOM 1 (Boş Küme)**.** *$\varnothing$ bir kümedir.*

AKSİYOM 2 (Bitiştirme)**.** *Tüm a ve b kümeleri için $a \cup \{b\}$ bir kümedir.*

AKSİYOM 3 (Yerleştirme)**.** *Her $\boldsymbol{F}$ göndermesi için, eğer bir A kümesinin her b elemanı için $\boldsymbol{F}(b)$ tanımlanırsa, o zaman*

$$\{\boldsymbol{F}(x) \colon x \in a\}$$

sınıfı bir kümedir.

Teorem 15. **ON**'*de tanımlanan bir* $\boldsymbol{F}$ *göndermesi için, her* α *için*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\},$$

ve sonuç olarak, tüm α *ve* β *için*

$$\left.\begin{aligned} \alpha < \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta), \\ \alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \subseteq \boldsymbol{F}(\beta). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Kanıt. Yerleştirme Aksiyomu sayesinde, Ordinal Özyineleme Teoreminin kanıtının yöntemini kullanarak

1) $\boldsymbol{F}(0) = \varnothing$,
2) $\boldsymbol{F}(\alpha') = \boldsymbol{F}(\alpha) \cup \{\boldsymbol{F}(\alpha)\}$,
3) α limit ise
$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\} \tag{3.3}$$

koşullarını sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ göndermesinin var olduğunu kanıtlayabiliriz. O zaman ordinal tümevarımdan her α için (3.3) doğrudur. O halde

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta), \\ \alpha \leqslant \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \subseteq \boldsymbol{F}(\beta). \end{aligned}$$

Tersleri de doğrudur. Zira $\boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta)$ ama $\beta \leqslant \alpha$ ise, o zaman

$$\boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Bu durumda bir γ için $\gamma < \alpha$ ve $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\gamma)$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\gamma) \in \boldsymbol{F}(\gamma)$. O halde boş olmayan $\{\xi \colon \boldsymbol{F}(\xi) \in \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur, ki bu çelişkidir. Sonuç olarak (3.2) doğrudur □

Her $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\bigcup \boldsymbol{A} = \{x \colon \exists y\ (y \in A \wedge x \in y)\}$$

olsun. Bu yeni sınıf, $\boldsymbol{A}$'nın **bileşimidir.** Özel olarak

$$B \cup C = \bigcup \{B, C\}.$$

Sonuç. *Teoremde* $\boldsymbol{F}$ *birebirdir, dolayısıyla* $\boldsymbol{F}(\xi) = \xi$ *varsayılabilir. Bu durumda*

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\},$$
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta.$$

Ayrıca $B \subseteq \mathbf{ON}$ *ise*

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma 20. Sonucu kanıtlayın.

Şimdi **ON**'nin sonuçtaki gibi olduğunu varsayalım. O zaman **ON**, $\in$ bağıntısı tarafından iyisıralanmıştır, ve sınıfın her elemanı sınıfın bir altkümesidir. Ayrıca, sınıfın her elemanının aynı özellikleri vardır (yani eleman $\in$ bağıntısı tarafından iyisıralanmıştır, ve elemanın her elemanı elemanın bir altkümesidir).

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\forall x \ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \subseteq \boldsymbol{A})$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A}$ **geçişlidir.** Geçişli kümeler

$$\forall y \ \big(y \in x \Rightarrow \forall z \ (z \in y \Rightarrow z \in x)\big)$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur. Ayrıca $\in$ tarafından doğrusal sıralanmış kümeler

$$\forall y \ (y \in x \Rightarrow y \notin y) \wedge$$

$$\forall y\,\forall z\,\forall u\,\big(y \in x \wedge z \in x \wedge u \in x \Rightarrow (y \in z \wedge z \in u \Rightarrow y \in u)\big) \wedge \forall y\,\forall z\,(y \in x \wedge z \in x \Rightarrow y \in z \vee y = z \vee y \in z)$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur. Bu formül $\varphi(x)$ ise $\in$ tarafından iyisıralanmış kümeler

$$\varphi(x) \wedge \forall y\,\Big(\forall z\,(z \in y \Rightarrow z \in x) \wedge \exists z\; z \in y \Rightarrow \exists z\,\big(z \in y \wedge \forall u\,(u \in y \Rightarrow z \in u \vee z = u)\big)\Big)$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur.

3.2. Ordinaller vardır

Şimdi sayfa 21'deki özelliklerini unutunca, yeniden her **ordinali,**

1) geçişli ve
2) $\in$ tarafından iyisıralanmış

bir küme olarak tanımlarız. O zaman ordinaller bir sınıf oluştururlar. Önceki gibi bu sınıf **ON** olsun, ve **ON**'nin elemanları, küçük Yunan harfleriyle yazılsın. Sadece küme aksiyomları kullanarak, sayfa 21'deki özellikleri teorem olarak elde edeceğiz.

Teorem 16. **ON** *geçişlidir, yani her ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ be $b \in \alpha$ olsun. O zaman $b \subseteq \alpha$, dolayısıyla α gibi b, $\in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Şimdi $c \in b$ olsun. O zaman $c \in \alpha$, dolayısıyla $c \subseteq \alpha$. Özel olarak $d \in c$ ise $d \in \alpha$. Bu durumda d, c, ve b, α'nın elemanıdırlar, ve $d \in c$ ve $c \in b$, dolayısıyla $d \in b$ çünkü α'da $\in$ geçişlidir. Sonuç olarak $c \subseteq b$. O halde b geçişlidir. $\square$

Lemma 8. **ON**, *$\in$ tarafından sıralanmıştır, yani* **ON***'de $\in$, yansımasız ve geçişlidir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ olsun. α'da $\in$ bağıntısı yansımasız olduğundan $\alpha \notin \alpha$, çünkü $\alpha \in \alpha$ ise α'nın bir β elemanı için $\beta \in \beta$.
Eğer $\beta \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$ ise, α geçişli olduğundan $\gamma \in \alpha$. □

Her ordinalin boş olmayan her a altkümesinin, $\in$ bağıntısına göre en küçük elemanıdır. Buradaki a'nın yerine bir *sınıf* kullanmak isteriz. Sonraki aksiyomu kullanacağız.

AKSİYOM 4 (Ayırma). *Her kümenin her altsınıfı bir kümedir.*

Bu şekilde her a kümesi ve $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfı için

$$\{x\colon x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

sınıfı bir kümedir. Bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılabilir.

Lemma 9. **ON***'de $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.*

Kanıt. Kanıtın iki parçası vardır.
$\boxed{\boldsymbol{\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\colon}$ $\alpha \in \beta$ olsun. β geçişli olduğundan $\alpha \subseteq \beta$. β'da $\in$ yansımasız olduğundan $\alpha \neq \beta$. Bu şekilde $\alpha \subset \beta$.
$\boxed{\boldsymbol{\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta}\colon}$ $\alpha \subset \beta$ olsun. O zaman $\beta \smallsetminus \alpha$ kümesi boş değildir. $\gamma = \min(\beta \smallsetminus \alpha)$ olsun. O zaman $\gamma \in \beta$. Biz $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \alpha}}$ kanıtlayacağız. Bu kanıtın iki parçası vardır.
$\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \alpha}\colon}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman β geçişli olduğundan $\delta \in \beta$. Ayrıca $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$, çünkü $\delta \in \min(\beta \smallsetminus \alpha)$. O halde $\delta \in \alpha$. Böylece $\gamma \subseteq \alpha$.

$\boxed{\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{\gamma}\text{:}}$ $\delta \in \alpha$ olsun. O zaman $\delta \in \beta$, çünkü $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$. Ama $\delta \in \gamma$, $\delta = \gamma$, veya $\gamma \in \delta$; ve son iki imkân olmaz. Zira $\gamma \in \beta \smallsetminus \alpha$ olduğundan $\delta \neq \gamma$; ve $\gamma \notin \alpha$ olduğundan $\gamma \notin \delta$, çünkü $\delta \in \alpha$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \gamma$. □

Şimdi **ON**'nin $\in$ veya $\subset$ sıralamasını $<$ olarak yazabiliriz.

Lemma 10. **ON**'*nin* $<$ *sıralaması doğrusaldır.*

Kanıt. $\alpha \nleqslant \beta$ olsun. $\boxed{\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\alpha}}$ göstereceğiz.

Varsayımdan $\alpha \nsubseteq \beta$, dolayısıyla $\alpha \smallsetminus \beta \neq \varnothing$. $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus \beta)$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, yani $\gamma < \alpha$. $\boxed{\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}}$ göstereceğiz.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma} \subseteq \boldsymbol{\beta}\text{:}}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman $\delta < \min(\alpha \smallsetminus \beta)$, ama $\delta \in \alpha$, dolayısıyla $\delta \in \beta$.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma} \not\subseteq \boldsymbol{\beta}\text{:}}$ $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$ olduğundan $\gamma \notin \beta$, yani $\gamma \not\subset \beta$. □

Teorem 17. **ON**'*nin* $<$ *doğrusal sıralaması bir iyisıralamadır. Aslında* **ON**'*nin boş olmayan her* altsınıfının *en küçük elemanı vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ ve $\alpha \in \boldsymbol{A}$ olsun.

- $\alpha \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$ ise $\alpha = \min(\boldsymbol{A})$.
- $\alpha \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing$ ise $\min(\alpha \cap \boldsymbol{A}) = \min(\boldsymbol{A})$. □

Şimdi Teorem 16 ve 17'den **ON** hem geçişli hem $\in$ tarafından iyisıralanmıştır. Tanıma göre **ON**'nin elemanlarının aynı özellikleri vardır. Ama **ON** $\in$ tarafından sıralanmış olduğundan kendinin elemanı olamaz. Bu şekilde **ON** küme olamaz. Bu sonuç, Teorem 7 olarak gördüğümüz **Burali-Forti Paradoksudur.**

Teorem 18. $\varnothing \in \mathbf{ON}$ *ve* $\alpha \in \mathbf{ON}$ *ise* $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{ON}$, *ve ayrıca her* β *ordinali için*

$$\beta \leqslant \alpha \vee \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta.$$

Alıştırma 21. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi

$$0 = \varnothing, \qquad\qquad \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$$

tanımlayabiliriz.

AKSİYOM 5 (Sonsuzluk). *Ne limit olan ne limit içeren ordinallerin oluşturduğu sınıf bir kümedir.*

Sonsuzluk Aksiyomu tarafından verilen küme, ω'dır.

AKSİYOM 6. *Her kümenin bileşimi bir kümedir.*

Teorem 19. *Sayfa 32'de tanımlanmış* **ON** *sınıfı, Sayfa 21'deki özellikleri sağlar.*

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

4. Ordinal Toplama

4.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α ordinali için

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{4.1}$$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \tag{4.2}$$

$$\gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \gamma\}. \tag{4.3}$$

Ordinal toplamanın özelliklerinin çoğu, tümevarım ile kanıtlanır; ama ilk teoremimiz, tümevarımdan değildir.

Teorem 20. $\alpha + 1 = \alpha'$.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= \alpha + 0' && [(2.3) \text{ tanımından}] \\ &= (\alpha + 0)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha'. && [(4.1) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

□

Teorem 21. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Kanıt. Ordinal tümevarım kullanacağız.

1. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 && [\text{varsayımdan}] \\ &= 0 && [(4.1) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha. && [\text{varsayımdan}] \end{aligned}$$

2. Eğer

$$0 + \beta = \beta \tag{4.4}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \beta' &= (0 + \beta)' && \text{[(4.2) tanımından]} \\ &= \beta'. && \text{[(4.4) hipotezinden]} \end{aligned}$$

3. Bir α limiti için

$$\forall \xi \ (\xi < \alpha \Rightarrow 0 + \xi = \xi) \tag{4.5}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup\{0 + \xi \colon \xi < \alpha\} && \text{[(4.3) tanımından]} \\ &= \sup\{\xi \colon \xi < \alpha\} && \text{[(4.5) hipotezinden]} \\ &= \alpha. && \text{[Teorem 11'den]} \end{aligned}$$

□

Alıştırma 23. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Her α için $1 + \alpha = \alpha'$ kanıtlayacağız.

1. $1 + 0 = 1 = 0'$.
2. $1 + \beta = \beta'$ ise, o zaman

$$1 + \beta' = (1 + \beta)' = (\beta')'.$$

3. γ limit ve $\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow 1 + \xi = \xi')$ ise

$$1 + \gamma = \sup_{\xi < \gamma}(1 + \xi) = \sup_{\xi < \gamma}(\xi') = \gamma'.$$

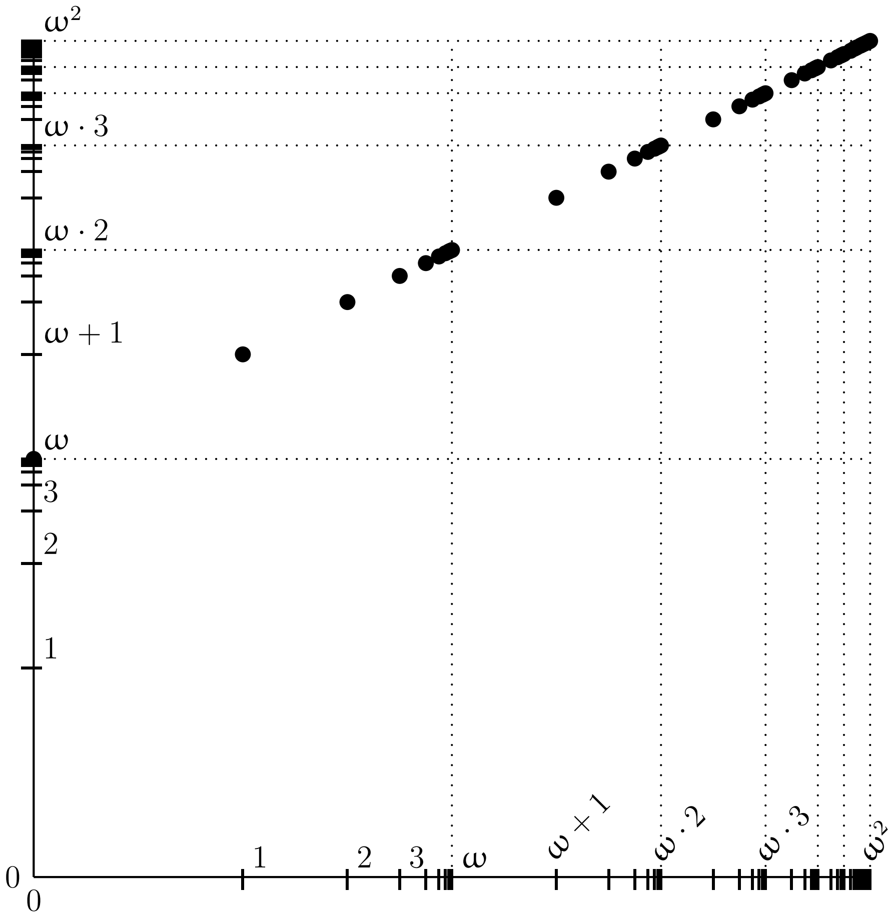
Böylece her α için $1 + \alpha = \alpha'$.

Teorem 22. *Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.*

Kanıt. Teorem 12'den $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ göstermek yeter. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< (\alpha + \beta)' && \text{[(2.5) tanımından]} \\ &= \alpha + \beta'. && \text{[(4.2) tanımından]} \end{aligned}$$

□



Şekil 2.: $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği

Örneğin Şekil 2'ye bakın. Şekilde

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega, \quad \omega \cdot 3 = \omega \cdot 2 + \omega, \quad \omega \cdot 4 = \omega \cdot 3 + \omega,$$

ve genelde, Teorem 5'i kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha \cdot 0 = 0, \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha, \qquad \alpha \cdot (k+1) = \alpha \cdot k + \alpha.$$

Bu şekilde $\alpha \cdot n$, "α'dır n kere" veya "α'nın n katıdır." Ayrıca

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x).$$

Alıştırma 24. $\xi \mapsto \xi \cdot 2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Alıştırma 25. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

> Her α için, her β için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ kanıtlayacağız.
> 1. $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
> 2. Eğer $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ise, o zaman
>
> $$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta' + \alpha.$$
>
> 3. Eğer γ limit ve $\forall \xi\ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha + \xi = \xi + \alpha)$ ise, o zaman
>
> $$\alpha + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi) = \sup_{\xi<\gamma}(\xi + \alpha) = \gamma + \alpha.$$
>
> Bu şekilde her durumda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorem 23. *Ordinal toplama birleşmelidir.*

Kanıt. Her γ için, tümevarım kullanarak tüm α ve β için

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

göstereceğiz.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta$ [(4.1) tanımından]
$\quad\quad = (\alpha + \beta) + 0.$ [(4.1) tanımından]

2. Eğer

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta \tag{4.6}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \delta') &= \alpha + (\beta + \delta)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\
&= (\alpha + (\beta + \delta))' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\
&= ((\alpha + \beta) + \delta)' && [(4.6) \text{ hipotezinden}] \\
&= (\alpha + \beta) + \delta'. && [(4.2) \text{ tanımından}]
\end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve

$$\forall \xi \ \bigl(\xi < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + \xi\bigr) \tag{4.7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta) + \delta \\
&= \sup\{(\alpha + \beta) + \xi \colon \xi < \delta\} && [(4.3) \text{ tanımı}] \\
&= \sup\{\alpha + (\beta + \xi) \colon \xi < \delta\} && [(4.7) \text{ hipotezi}] \\
&= \alpha + \sup\{\beta + \xi \colon \xi < \delta\} && [\xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normaldir}] \\
&= \alpha + (\beta + \delta). && [(4.3) \text{ tanımı}]
\end{aligned}$$ □

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha \cdot n = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 24. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha \cdot (k + \ell) = \alpha \cdot k + \alpha \cdot \ell$.*

Alıştırma 26. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 25. *Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.*

Kanıt. $\beta \leqslant \gamma$ olsun. α üzerinden tümevarım kullanarak

$$\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$$

kanıtlayacağız.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0.$
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 8'e göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. Eğer δ limit ise

$$\forall \xi \ (\xi < \delta \Rightarrow \beta + \xi < \gamma + \xi)$$

olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi) \leqslant \sup_{\xi<\delta}(\gamma + \xi) = \gamma + \delta. \qquad \square$$

4.2. Hesaplamalar

Bu altbölümün teoremleri tümevarım kullanmaz.

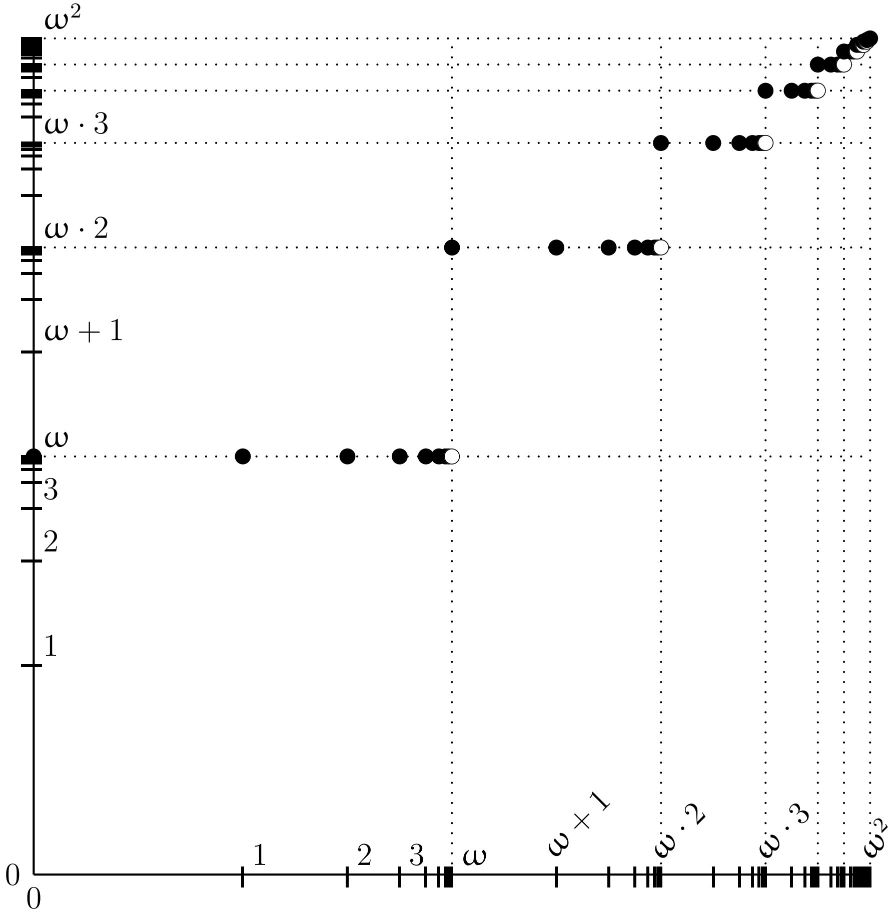
Teorem 26. *$k < \omega$ ise $k + \omega = \omega$. (Şekil 3'e bakın.)*

Kanıt. $k + \omega = \sup\{k + x \colon x < \omega\} = \omega.$ $\square$

Sonuç. *$k < \omega$ ve $1 \leqslant n < \omega$ ise*

$$k + \omega \cdot n = \omega \cdot n.$$

Alıştırma 27. Sonucu kanıtlayın.



Şekil 3.: $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

Teorem 27 (Çıkarma)**.** *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta \tag{4.8}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Denklemin çözümü varsa, Teorem 22'ye göre tek çözüm vardır.

Teoremler 21 ve 25'ten $\alpha + \beta \geqslant \beta$, dolayısıyla $\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}$ sınıfının β' üstsınırı vardır. Şimdi γ, sınıfının supremumu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \alpha + \sup\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}\\ &= \sup\{\alpha + \xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\} \leqslant \beta,\\ (\alpha + \gamma)' &= \alpha + \gamma' > \beta,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\alpha + \gamma = \beta$. □

Alıştırma 28. $\alpha \leqslant \beta$ varsayınca, $\{\xi\colon a + \xi \geqslant \beta\}$ sınıfının boş olmayıp sınıfın en küçük elemanının (4.8) denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

Teorem 28. *$\omega + \alpha = \alpha$ ancak ve ancak $\omega^2 \leqslant \alpha$.*

Kanıt.
$$\begin{aligned}\omega + \omega^2 &= \omega + \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega + \omega \cdot x)\\ &= \sup_{x<\omega}\bigl(\omega \cdot (1 + x)\bigr)\\ &= \omega^2.\end{aligned}$$

Eğer $\alpha \geqslant \omega^2$ ise, o zaman bir β için $\omega^2 + \beta = \alpha$, dolayısıyla

$$\omega + \alpha = \omega + \omega^2 + \beta = \omega^2 + \beta = \alpha.$$

Şimdi $\alpha < \omega^2$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için

$$\omega \cdot k \leqslant \alpha < \omega \cdot (k+1),$$
$$\omega \cdot (k+1) \leqslant \omega + \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha < \omega + \alpha$. □

Teorem sayesinde $\omega \leqslant \alpha < \omega^2$ ise, o zaman bir α_1 için

$$\omega + \alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha.$$

Eğer $\omega \leqslant \alpha_1$ ise, o zaman bir α_2 için

$$\omega + \alpha_2 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1,$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\alpha = \underbrace{\omega + \cdots + \omega}_{k} + \alpha_k = \omega \cdot k + \alpha_k.$$

ON iyisıralı olduğundan bir k için $\alpha_k < \omega$. Bu şekilde

$$\{\xi \colon \xi < \omega^2\}$$

kümesinin her elemanı, $\omega \cdot k + \ell$ biçiminde yazılabilir. Verilen küme, toplama altında kapalıdır, ve toplama kuralı,

$$(\omega \cdot k + \ell) + (\omega \cdot m + n) = \omega \cdot (k+m) + n.$$

Alıştırma 29. $\alpha = \omega \cdot 17 + 6$ ve $\beta = \omega \cdot 1000 + 5$ ise $\alpha + \beta$ toplamını hesaplayın.

4.3. Kardinaller

Şimdi herhangi A ve B kümeleri için

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

olsun; bu bileşim, A ve B'nin **ayrık bileşimidir.** Bölüm 3'ten

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\}$$

anlaşmasını kullanacağız.

Teorem 29. $\alpha + \beta \approx \alpha \sqcup \beta$.

Kanıt. Teorem 27'den

$$\begin{cases} (\xi, 0) \mapsto \xi, \\ (\eta, 1) \mapsto \alpha + \eta \end{cases}$$

kuralı, $\alpha \sqcup \beta$ ayrık bileşiminden $\alpha + \beta$ kümesine giden bir eşleme tanımlar. □

Bir A kümesi bir ordinalle eşlenik olsun. Tanıma göre

$$\operatorname{kard}(A) = \min\big\{\xi \colon \xi \approx A\big\};$$

bu ordinal, A'nın **kardinalidir.** Kardinaller, κ, λ, μ, ve ν harfleri ile gösterilecektir.

Eğer $f \colon A \to B$ ve $C \subseteq A$ ise

$$f[C] = \{f(x) \colon x \in C\}$$

olsun. Eğer f birebir ise, o zaman A'nın B'ye bir **gömmesidir,** ve

$$A \approx f[A] \subseteq B.$$

Bu durumda
$$f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$$
yazalım, ve öyle bir f gömmesi varsa
$$A \preccurlyeq B$$
yazalım.

Teorem 30 (Schröder–Bernstein)**.** *$A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ ise*
$$A \approx B.$$

Kanıt. $f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$ ve $g\colon B \xrightarrow{\preccurlyeq} A$ olsun. Özyinelemeyle
$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{n+1} &= g[B_n], \\ B_0 &= B, & B_{n+1} &= f[A_n] \end{aligned}$$
olsun. O zaman
$$\begin{aligned} f[A_0 \smallsetminus A_1] &= B_1 \smallsetminus B_2, \\ g[B_0 \smallsetminus B_1] &= A_1 \smallsetminus A_2, \end{aligned}$$
dolayısıyla $A_0 \smallsetminus A_2 \approx B_0 \smallsetminus B_2$. Benzer şekilde
$$A_n \smallsetminus A_{n+2} \approx B_n \smallsetminus B_{n+2},$$
dolayısıyla
$$A \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} A_i \approx B \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} B_i.$$
Ayrıca
$$f\left[\bigcap_{i<\omega} A_i\right] = \bigcap_{i<\omega} f[A_i] = \bigcap_{0<i<\omega} B_i = \bigcap_{i<\omega} B_i,$$
dolayısıyla $\bigcap_{i<\omega} A_i \approx \bigcap_{i<\omega} B_i$, ve sonuç olarak $A \approx B$. □

Teorem 31. $\xi \mapsto \operatorname{kard}(\xi)$ *artandır.*

Kanıt. Eğer $\alpha \leqslant \beta$ ama $\operatorname{kard}(\beta) \leqslant \operatorname{kard}(\alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha \preccurlyeq \beta \approx \operatorname{kard}(\beta) \preccurlyeq \operatorname{kard}(\alpha) \approx \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha \approx \beta$. □

Teorem 32. $k < \omega$ *ise* $\operatorname{kard}(k) = k$.

Alıştırma 30. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 33. $\operatorname{kard}(\omega + \omega) = \omega$.

Alıştırma 31. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç. $\{\xi : \omega \leqslant \xi < \omega^2\}$ *kümesinin her elemanının kardinali* ω*'dır.*

Alıştırma 32. Sonucu kanıtlayın.

5. Ordinal çarpma

5.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$
$$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \gamma\}.$$

Ordinal çarpma hakkında ilk teoremimizin bir şıkkı tümevarım kullanmaz; kalanlar tümevarım kullanıyor.

Teorem 34.
1. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
2. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
3. $0 \cdot \alpha = 0$.

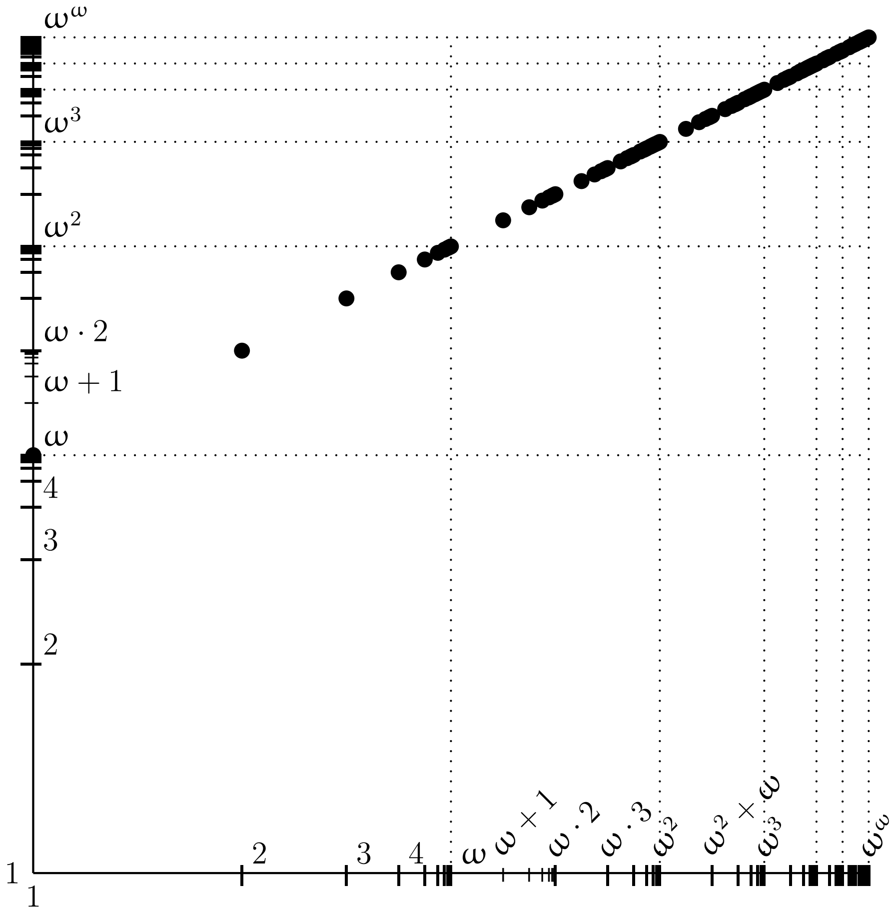
Alıştırma 33. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 35. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemi normaldir.*

Alıştırma 34. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin Şekil 4'e bakın. Şekilde

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega, \qquad \omega^3 = \omega^2 \cdot \omega, \qquad \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega,$$



Şekil 4.: $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği

ve genelde, Teorem 5'i kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha.$$

Ayrıca

$$\omega^\omega = \sup_{x<\omega}(\omega^x).$$

Alıştırma 35. $\xi \mapsto \xi^2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 36. *Ordinal çarpma, toplama üzerine soldan dağılır.*

Kanıt. Ordinal tümevarım ile

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{5.1}$$

kanıtlayacağız.

1. $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\ &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'. \end{aligned}$$

3. Şimdi γ limit ve

$$\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)$$

olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise, iddia apaçıktır, dolayısıyla $\alpha > 0$ varsayacağız.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \sup_{\xi<\gamma}(\beta + \xi) \qquad \text{[tanım]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\xi<\gamma}\bigl(\alpha\cdot(\beta+\xi)\bigr) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\eta \text{ normaldir}]\\
&= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) && [\text{tümevarım hipotezi}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\beta+\eta \text{ normaldir}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. && [\text{tanım}]
\end{aligned}
$$

□

Alıştırma 36. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $0\cdot(\beta+\gamma)=0=0+0=0\cdot\beta+0\cdot\gamma$.
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
\alpha'\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\beta)+(\alpha\cdot\gamma+\gamma)\\
&= \alpha'\cdot\beta+\alpha'\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

3. Eğer α limit ve $\forall\xi\ \bigl(\xi<\alpha\Rightarrow\xi\cdot(\beta+\gamma)=\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)$ ise

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot(\beta+\gamma)\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\beta)+\sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\gamma)\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

Alıştırma 37. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $(\alpha+\beta)\cdot 0=0=0+0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$.
2. Eğer $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot\gamma' &= (\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma)+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\alpha)+(\beta\cdot\gamma+\beta)\\
&= \alpha\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma'.
\end{aligned}
$$

3. Eğer γ limit ve $\forall\xi\ \big(\xi < \gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot\xi = \alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi\big)$ ise

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\gamma &= \sup_{\xi<\gamma}\big((\alpha+\beta)\cdot\xi\big)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi)+\sup_{\xi<\gamma}(\beta\cdot\xi)\\ &= \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.\end{aligned}$$

Teorem 37. *Ordinal çarpma birleşmelidir.*

Alıştırma 38. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 38. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha^{k+\ell} = \alpha^k\cdot\alpha^\ell$.*

Alıştırma 39. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 39. *Her $\xi \mapsto \xi\cdot\alpha$ işlemi artandır.*

Alıştırma 40. Teoremi kanıtlayın.

5.2. Hesaplamalar

Lemma 11. *$0 < \ell < \omega$ ise $1+\omega^\ell = \omega^\ell$.*

Alıştırma 41. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 40. *$k < m < \omega$ ise $\omega^k+\omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. Bir ℓ için, $k+\ell=m$ ve $0<\ell<\omega$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\omega^k+\omega^m &= \omega^k+\omega^{k+\ell}\\ &= \omega^k+\omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^k\cdot(1+\omega^\ell)\\ &= \omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^{k+\ell}\\ &= \omega^m. \end{aligned}$$ □

Teorem 41. *$1\leqslant k<\omega$ ise $k\cdot\omega=\omega$. (Şekil 5'e bakın.)*

Alıştırma 42. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 42 (Bölme). *$1\leqslant\alpha$ ise (ξ,η) için*

$$\alpha\cdot\eta+\xi=\beta\wedge\xi<\alpha \tag{5.2}$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

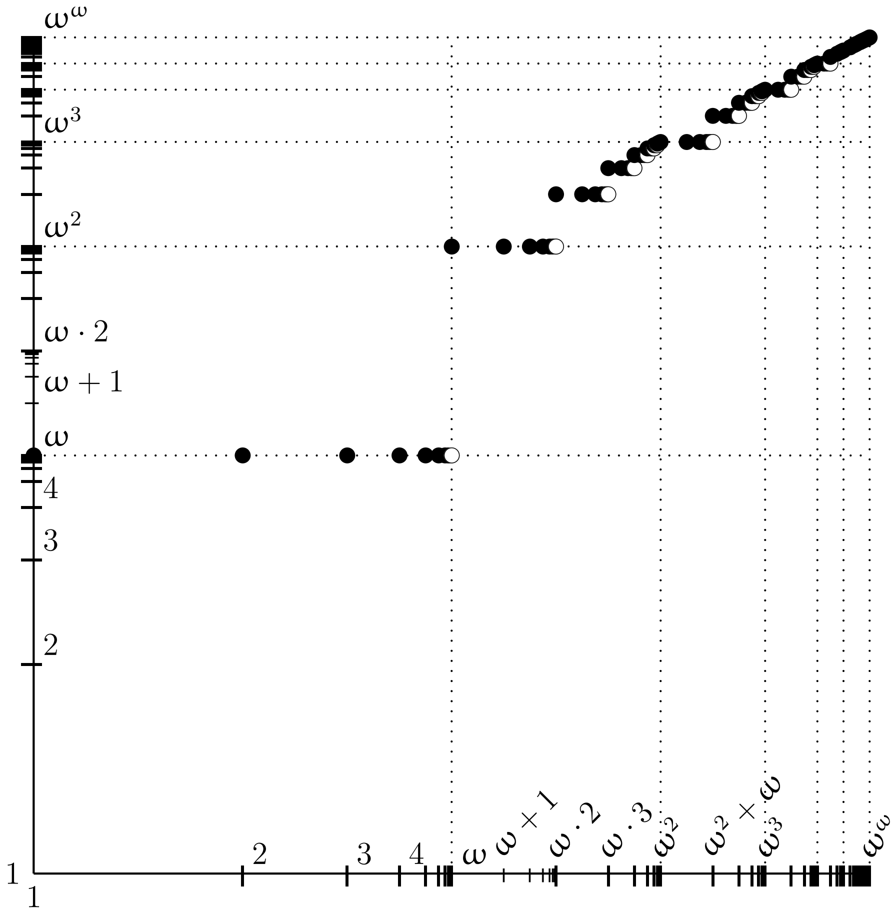
Alıştırma 43. Teoremi kanıtlayın. Örneğin, aşağıdaki iddiaları gösterin.

1. $\alpha>0$ ise $\alpha\cdot\beta\geqslant\beta$.
2. $\{\eta\colon \alpha\cdot\eta\leqslant\beta\}$ kümesinin üstsınırı vardır.
3. $\sup\{\eta\colon \alpha\cdot\eta\leqslant\beta\}=\delta$ olsun. O zaman $\alpha\cdot\gamma+\xi=\beta$ denkleminin γ çözümü vardır, ve $\delta<\alpha$. Ayrıca (γ,δ), (5.2) sisteminin tek çözümü vardır.

Teorem 43. *ω^ω,*

$$\omega\cdot\xi=\xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.



Şekil 5.: $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği

Kanıt.
$$\begin{aligned}\omega \cdot \omega^\omega &= \omega \cdot \sup_{x<\omega}(\omega^x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega \cdot \omega^x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega^{1+x})\\ &= \omega^\omega.\end{aligned}$$

Şimdi $\alpha < \omega^\omega$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için

$$\omega^k \leqslant \alpha < \omega^{k+1},$$
$$\omega^{k+1} \leqslant \omega \cdot \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha < \omega \cdot \alpha$. □

Teorem sayesinde $\alpha < \omega^\omega$ ise, o zaman bazı α_1 ve a_0 için

$$\omega \cdot \alpha_1 + a_0 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha, \qquad a_0 < \omega.$$

Eğer $\alpha_1 > 0$ ise, o zaman bazı α_2 ve a_1 için

$$\omega \cdot \alpha_2 + a_1 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1, \qquad a_1 < \omega,$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= 0,\\ \alpha_k &= a_k,\\ \alpha_{k-1} &= \omega \cdot a_k + a_{k-1},\\ \alpha_{k-2} &= \omega^2 \cdot a_k + \omega \cdot a_{k-1} + a_{k-2},\\ &\dots\\ \alpha_1 &= \omega^{k-1} \cdot a_k + \omega^{k-2} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega \cdot a_2 + a_1,\\ \alpha &= \omega^k \cdot a_k + \omega^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega^2 \cdot a_2 + \omega \cdot a_1 + a_0.\end{aligned}$$

Burada bazı a_i sıfır olabilir. Sıfır terimler silinirse, o zaman bir n için,

$$\omega > b_0 > b_1 > \dots > b_{n-1}$$

koşulunu sağlayan bazı b_i için, ve bazı c_i sayma sayıları için

$$\alpha = \omega^{b_0} \cdot c_0 + \omega^{b_1} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Bu ifadeye α'nın **Cantor normal biçimi** denir. (0'ın Cantor normal biçimi 0'dır.)

Teorem 44. *$0 < m < \omega$ ve $\alpha < \omega^m$ ise $\alpha + \omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. α'nın Cantor normal biçimini yazın ve Teorem 40'ı kullanın. □

Sonuç. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^m \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma 44. Sonucu kanıtlayın.

Örneğin

$$(\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot 6 = \omega^5 \cdot 60 + \omega^3 \cdot 8 + \omega.$$

Sonucun durumunda aşağıdaki eşitlik çıkar.

$$\begin{aligned}(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega &= \omega^m \cdot n + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \cdots \\ &= \omega^m \cdot n \cdot \omega \\ &= \omega^{m+1}.\end{aligned}$$

Aslında eşitliğin gerçek kanıtının Teorem 44'e ihtiyacı yoktur.

Teorem 45. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha < \omega^m$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega = \omega^{m+1},$$

dolayısıyla $k \in \mathbb{N}$ ise

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega^k = \omega^{m+k}.$$

Kanıt. $(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k < \omega^m \cdot (n+1) \cdot k$ olduğundan

$$\begin{aligned}\omega^{m+1} &\leqslant (\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega\\ &= \sup_{x<\omega}\bigl((\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot x\bigr)\\ &\leqslant \sup_{x<\omega}\bigl(\omega^m \cdot (n+1) \cdot x\bigr)\\ &= \omega^{m+1}.\end{aligned}$$

□

Örneğin

$$\begin{aligned}&(\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 8)\\ &= (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot \omega^2 \cdot 3 + (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot 8\\ &= \omega^5 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 32 + \omega \cdot 6.\end{aligned}$$

Alıştırma 45. $(\omega^9 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9) \cdot (\omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9)$ çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayın.

5.3. Kardinaller

Teorem 46. $\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta$.

Kanıt. Teorem 42'den

$$(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi,$$

$\alpha \times \beta$ kartezyan çarpımından $\alpha \cdot \beta$ ordinal çarpımına giden bir eşlemedir. □

Teorem 47. $\operatorname{kard}(\omega \cdot \omega) = \omega$.

Alıştırma 46. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 48. *$\{\xi\colon \omega \leqslant \xi < \omega^\omega\}$ kümesinin her elemanının kardinali ω'dır.*

Alıştırma 47. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 49. *Her k doğal sayısı için f_k bir A_k kümesini ω'ya gömsün. O zaman*
$$\bigcup_{i<\omega} A_i \preccurlyeq \omega.$$

Kanıt. $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminde
$$g(x) = \min\{i\colon x \in A_i\}$$
olsun. O zaman $x \mapsto \big(g(x), f_{g(x)}(x)\big)$ göndermesi, bileşimin $\omega \times \omega$ çarpımına bir gömmesidir. □

Sonuç. $\omega^\omega \approx \omega$.

Kanıt. Her n için, $\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega$ olduğundan, Teorem 46'nın kanıtınından kesin bir f_n için
$$f_n\colon \omega^{n+1} \xrightarrow{\approx} \omega^n \times \omega.$$
Şimdi $g\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. O zaman
$$g \circ f_1\colon \omega^2 \xrightarrow{\approx} \omega.$$
Mümkünse
$$h_m\colon \omega^m \xrightarrow{\approx} \omega \tag{5.3}$$
olsun. O zaman bir ve tek bir h_{m+1} için,
$$h_{m+1}\colon \omega^{m+1} \to \omega,$$
$$\forall\xi\ \forall\eta\ \forall z\ \Big(f_n(\xi) = (\eta, z) \Rightarrow h_{m+1}(\xi) = g\big(h_m(\eta), z\big)\Big);$$

ve bu durumda

$$h_{m+1}\colon \omega^{m+1} \xrightarrow{\approx} \omega.$$

Tümevarım ve özyinelemeyle her m sayma sayısı için, bir ve tek bir h_m için, (5.3) doğrudur. Şimdi

$$\omega^\omega = \sup_{0<x<\omega} (\omega^x) = \bigcup_{0<x<\omega} \omega^x$$

olduğundan teoremi kullanılabilir. $\square$

6. Ordinal kuvvet alma

6.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma = \sup_{0<\xi<\gamma} (\alpha^\xi) = \limsup_{\xi\to\gamma^-}(\alpha^\xi).$$

Teorem 50. *$\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$, ve*

$$0^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ durumunda}, \\ 0, & \alpha > 0 \text{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma 48. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 51. *$\alpha \geqslant 2$ ise $\xi \mapsto \alpha^\xi$ işlemi, normaldir.*

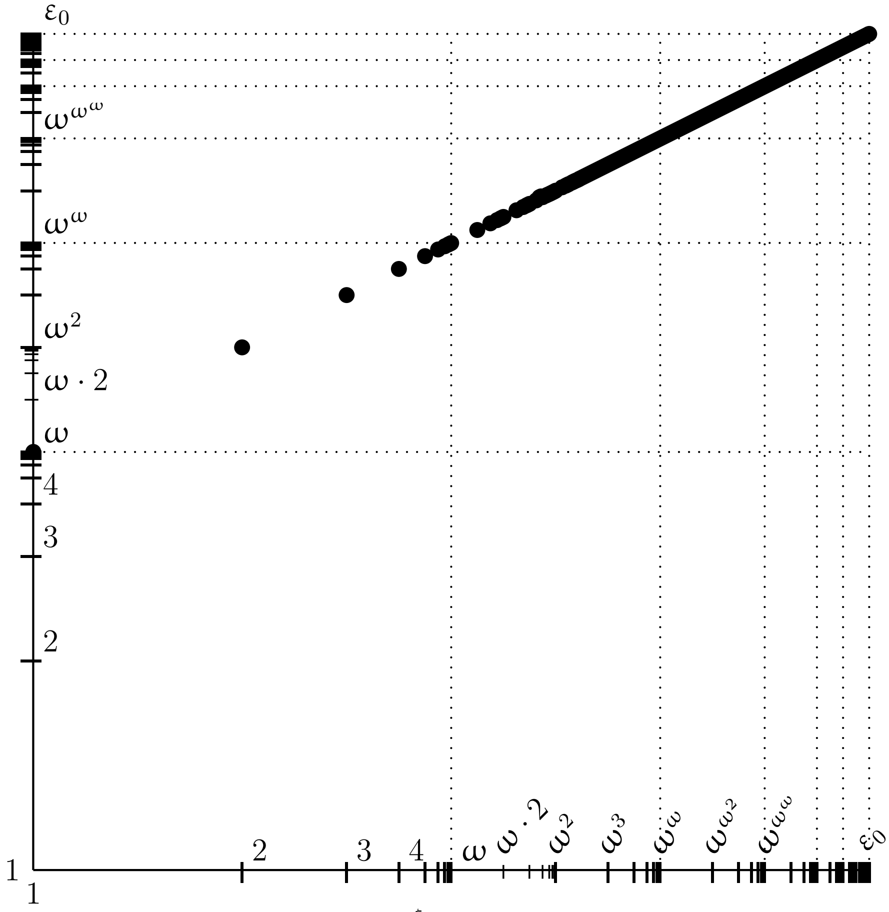
Alıştırma 49. Teoremi kanıtlayın.

Şekil 6'ya bakın. Şekilde

$$\varepsilon_0 = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}.$$

Alıştırma 50. $\xi \mapsto \xi^\xi$ işlemi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 52. *$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ve $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.*



Şekil 6.: $\eta = \omega^{\xi}$ denkleminin grafiği

Alıştırma 51. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 53. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \xi^\alpha$ artandır.*

Alıştırma 52. Teoremi kanıtlayın.

6.2. Hesaplamalar

Teorem 54 (Logaritma alma)**.** *$2 \leqslant \alpha$ ve $1 \leqslant \beta$ ise (ξ, η, ζ) için*

$$\alpha^\xi \cdot \eta + \zeta = \beta \wedge 0 < \eta < \alpha \wedge \zeta < \alpha^\xi$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Alıştırma 53. Teoremi kanıtlayın.

Teorem sayesinde $1 \leqslant \alpha$ ise, bazı α_0, a_0, ve β_1 için

$$\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \beta_1 = \alpha, \qquad 0 < a_0 < \omega, \qquad \beta_1 < \omega^{\alpha_0}.$$

Eğer $1 \leqslant \beta_1$ ise, o zaman bazı α_1, a_1, ve β_2 için

$$\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \beta_2 = \beta_1, \qquad 0 < a_1 < \omega, \qquad \beta_2 < \omega^{\alpha_1},$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\begin{gathered} \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k, \\ \{a_0, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{N}, \\ \alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot a_k. \end{gathered}$$

Son ifade, α'nın **Cantor normal biçimidir.**

Teorem 55. *$\alpha < \omega^\beta$ ise $\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.*

Alıştırma 54. Teoremi kanıtlayın. (Teorem 44'e bakın.)

Sonuç. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^\beta \cdot n \cdot k.$$

Alıştırma 55. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 56. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $1 \leqslant \gamma$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma}.$$

Alıştırma 56. Teoremi kanıtlayın. (Bir δ için $\gamma = 1 + \delta$ olduğunu kullanabiliriz.)

Şimdi iki Cantor normal biçiminin çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayabiliriz.

Teorem 57. *$0 < k < \omega$ ise*

$$k^{\omega^\xi} = \begin{cases} k, & \xi = 0 \textit{ durumunda}, \\ \omega^{\omega^{\xi-1}}, & 0 < \xi < \omega \textit{ durumunda}, \\ \omega^{\omega^\xi}, & \omega \leqslant \xi \textit{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma 57. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 58. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve γ limit ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha)^\gamma = \omega^{\beta \cdot \gamma}.$$

Teorem 59. *ε_0,*

$$\omega^\xi = \xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.

Alıştırma 58. Teoremi kanıtlayın.

6.3. Kardinaller

Herhangi α ve β ordinalleri için, β'dan α'ya giden göndermeler,

$$^{\beta}\alpha$$

sınıfını oluştursun, ve

$$\exp(\alpha,\beta) = \bigl\{f\colon f \in {}^{\beta}\alpha \land \{\xi \in \beta\colon f(\xi) > 0\} \prec \omega\bigr\}$$

olsun.

Teorem 60. $\alpha^{\beta} \approx \exp(\alpha,\beta)$.

Kanıt. $\exp(1,\beta) \approx 1 = 1^{\beta}$; ayrıca

$$\exp(0,\beta) \approx \begin{cases} 1, & \beta = 0 \text{ durumunda},\\ 0, & \beta > 0 \text{ durumunda}, \end{cases}$$

dolayısıyla $\exp(0,\beta) \approx 0^{\beta}$. Şimdi $\alpha \geqslant 2$ olsun. Eğer $\gamma < \alpha^{\beta}$ ise, o zaman Cantor normal biçimi gibi, bazı n doğal sayısı için, bazı γ_i ve δ_i için,

$$\beta > \gamma_0 > \cdots > \gamma_{n-1},$$
$$\{\delta_i\colon i < n\} \subseteq \alpha \smallsetminus \{0\},$$
$$\gamma = \alpha^{\gamma_0} \cdot c_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Şimdi tanıma göre

$$f_{\gamma}(\xi) = \begin{cases} \delta_i, & \xi = \gamma_i \text{ durumunda},\\ 0, & \xi \in \beta \smallsetminus \{\gamma_i\colon i < n\} \text{ durumunda} \end{cases}$$

olsun. O zaman $f_{\gamma} \in \exp(\alpha,\beta)$. Asında

$$\xi \mapsto f_{\xi}\colon \alpha^{\beta} \xrightarrow{\approx} \exp(\alpha,\beta).$$ □

Teorem 61. $\varepsilon_0 \approx \omega$.

Alıştırma 59. Teoremi kanıtlayın.

7. Kardinal kuvvetler

7.1. Sayılamaz kümeler

Eğer $A \preccurlyeq \omega$ ise, o zaman A **sayılabilir;** diğer durumda A **sayılamaz.** Gördüğümüz gibi sayılabilir kümelerden ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma ile sayılamaz kümeler elde edilemez.

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$'nın *altkümeleri* tarafından oluşturulmuş sınıftır. Yani

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}) = \{X : X \subseteq \boldsymbol{A}\}.$$

Buradaki X siyah olmadığından *küme* değişkenidir. Küme olmayan bir sınıf, bir sınıfın elemanı olamaz. Eğer $\mathbf{V}$, tüm kümeler tarafından oluşturulmuş sınıf ise, o zaman

$$\mathscr{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Ama $n \in \omega$ ise

$$n < 2^n = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(n)).$$

Teorem 62 (Cantor)**.** *Her A kümesi için*

$$A \prec \mathscr{P}(A).$$

Kanıt. $x \mapsto \{x\} \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$. Şimdi $f \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$ ise

$$B = \{x \in A \colon x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman A'nın her c elemanı için

$$c \in B \Leftrightarrow c \notin f(c),$$

dolayısıyla $B \neq f(c)$. Bu şekilde f, eşleme olamaz. □

Alıştırma 60. Cantor Teoreminin kanıtı A'nın küme olduğunu nasıl kullanır?

AKSİYOM 7 (Kuvvet Küme). *Her A kümesi için $\mathscr{P}(A)$ sınıfı bir kümedir.*

Herhangi a ve b için

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

olsun.

Teorem 63. $(a, b) = (c, d)$ *ancak ve ancak* $a = c$ *ve* $b = d$.

Alıştırma 61. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}$ tanımlanabilir.

Teorem 64. $A \times B \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$.

Alıştırma 62. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 65 (Hartogs). *Her kardinalin daha büyüğü vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} = \{\xi : \xi \preccurlyeq \kappa\}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$, ve ayrıca $\boldsymbol{A}$ geçişlidir, dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, bir α ordinalidir. Bu durumda $\alpha \notin \alpha$ olduğundan $\alpha > \kappa$.

Eğer f bir β'yı κ'ya gömürse, o zaman bir

$$\Big\{\big(f(\xi), f(\eta)\big) : \xi \leqslant \eta < \beta\Big\}$$

kümesi elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen tüm kümeler, $\kappa \times \kappa$ çarpımının bir B altkümesini oluşturur. O halde $B \approx \boldsymbol{A}$ (neden?), dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ da bir kümedir. □

Sonuç olarak

$$\kappa^+ = \min\{\xi : \kappa < \xi\}$$

tanımlanabilir, κ^+, κ'nın *kardinal* ardılıdır.

Şimdi özyineli tanıma göre

$$\aleph_0 = \omega,$$
$$\aleph_{\alpha'} = (\aleph_\alpha)^+,$$
$$\alpha \text{ limit ise } \aleph_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi.$$

(Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 66. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir, ve her sonsuz kardinal, bir α için, $\aleph_\alpha$'dır.*

Alıştırma 63. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 12. *Her sonsuz kardinal, ω'nın bir kuvvetidir.*

Alıştırma 64. Lemmayı kanıtlayın.

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \sqcup \lambda) = \mathrm{kard}(\kappa + \lambda),$$
$$\kappa \otimes \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \times \lambda) = \mathrm{kard}(\kappa \cdot \lambda)$$

olsun; bunlar κ ve λ'nın **kardinal toplamı** ve **kardinal çarpımıdır.**

Teorem 67. *Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise*

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{maks}(\kappa, \lambda).$$

Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise ve diğeri sıfır değilse

$$\kappa \otimes \lambda = \mathrm{maks}(\kappa, \lambda).$$

Kanıt. $\kappa \leqslant \lambda$ olsun. O zaman

$$\lambda \leqslant \kappa + \lambda \leqslant \lambda + \lambda \preccurlyeq 2 \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

ve $\kappa > 0$ ise

$$\lambda \leqslant \kappa \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

dolayısıyla $\lambda \approx \lambda^2$ kanıtlamak yeter.

Lemmadan bir α için $\lambda = \omega^\alpha$. O zaman $\lambda \approx \exp(\omega, \alpha)$. Şimdi $f \colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. Eğer g ve h, $\exp(\omega, \alpha)$ kümesinin elemanı ise $g * h$,

$$\xi \mapsto f(g(\xi), h(\xi))$$

elemanı olsun. O zaman

$$(g, h) \mapsto g * h \colon \exp(\omega, \alpha) \xrightarrow{\approx} \exp(\omega, \alpha) \times \exp(\omega, \alpha). \qquad \square$$

Sonuç olarak

$$\operatorname{kard}(\aleph_\alpha + \aleph_\beta) = \aleph_{\operatorname{maks}(\alpha,\beta)} = \operatorname{kard}(\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta).$$

Şimdi herhangi A kümesi için

$$\mathscr{P}_\omega(A) = \{X \in \mathscr{P}(A)\colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$$

olsun.

Teorem 68. *Eğer κ sonsuz ise $\mathscr{P}_\omega(\kappa) \approx \kappa$.*

Kanıt. Her m için $\{\xi \in \kappa\colon \operatorname{kard}(\xi) = m\} \preccurlyeq \kappa^m \approx \kappa$, dolayısıyla

$$\mathscr{P}_\omega(\kappa) = \bigcup_{i\in\omega}\{\xi \in \kappa\colon \operatorname{kard}(\xi) = i\} \preccurlyeq \omega \times \kappa \approx \kappa. \qquad \square$$

Teorem 69. *Eğer β sonsuz ve $2 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\operatorname{kard}(\alpha^\beta) = \operatorname{kard}(\beta).$$

Eğer α sonsuz ve $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ ise

$$\operatorname{kard}(\alpha^\beta) = \operatorname{kard}(\alpha).$$

Alıştırma 65. Teoremi kanıtlayın.

7.2. Seçme

Teorem 49'da, $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminin sayılabilir olması için, her A_k kümesinin sayılabilir olması yetmez, ama A_k kümesinin ω'ya kesin bir gömmesi bilinmelidir. Her k için, A_k kümesinin

ω'ya gömmeleri, boş olmayan bir $\mathscr{B}_k$ kümesini oluşturabilirler; ama gördüğümüz aksiyomlarla

$$\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow f_x \in \mathscr{B}_x)$$

koşulunu sağlayan $x \mapsto f_x$ göndermesinin olup olmadığını bilmiyoruz.

Gördüğümüz aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel** veya **ZF** aksiyomlarıdır.

Her k için $\mathscr{B}_k$ kümesinden bir f_k seçmek isteriz. *Seçim Aksiyomunun* biçimlerinin birine göre, bu seçme mümkündür. Bizim için, aşağıdaki biçim kullanılışlı olacaktır.

AKSİYOM 8 (Seçim)**.** *Her küme iyisıralanabilir.*

Örneğin $\bigcup_{x\in\omega} \mathscr{B}_x$ iyisıralanırsa, o zaman istediğimiz $x \mapsto f_x$ göndermesi

$$x \mapsto \min{(B_x)}$$

olabilir.

Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir *modelinde,* Seçim Aksiyomu doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir modelinde, Seçim Aksiyomu yanlıştır. Kısaca Seçim Aksiyomu, ZF'den bağımsızdır.

Seçim Aksiyomunu varsayıyoruz. Bununla ZF, **ZFC**'dir. Şimdi her kümenin kardinali vardır. Tanıma göre

$$\kappa^\lambda = \mathrm{kard}({}^\kappa\lambda).$$

Bu kuvvet, ordinal küvvet değil, **kardinal kuvvettir.** Örneğin $\aleph_0 = \omega$ olduğu halde $2^{\aleph_0}$, kardinal kuvvet olarak anlaşılır, ve bu kuvvet, 2^ω ordinal kuvvetinden farklıdır. Aslında $2^\omega = \omega$, ama sonraki teoreme göre $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Teorem 70. $2^\kappa = \mathrm{kard}(\mathscr{P}(\kappa))$.

Alıştırma 66. Teoremi kanıtlayın.

Aşağıdaki kurallar kolaydır.

$$
\begin{aligned}
0 < \lambda \Rightarrow 0^\lambda &= 0, \\
\kappa^0 &= 1, \\
1^\lambda &= 1, \\
\kappa^1 &= \kappa,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu, \\
\kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^\lambda)^\mu, \\
\kappa \leqslant \mu \wedge \lambda \leqslant \nu &\Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant \mu^\nu.
\end{aligned}
$$

Teorem 71. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \text{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \tag{7.1}$$

$$\lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa. \tag{7.2}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda.$$

Ayrıca $\lambda \leqslant \kappa$ ise κ sonsuzdur, dolayısıyla

$$\kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^\kappa. \qquad \square$$

Tekrar κ ve λ'n in biri sonsuz olsun. Eğer $\lambda \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ise, o zaman (7.1) gerektirmesine göre

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda \leqslant 2^\kappa;$$

burada (7.2) gerekmez. Bir durumda, eğer (7.1) gerektirmesinin hipotezi doğru değilse, o zaman $2^\lambda < \kappa$, dolayısıyla $\lambda \leqslant \kappa$, ve (7.2) kullanılabilir. Bu şekilde teoremin yerine

$$
\begin{aligned}
\kappa \leqslant 2^\lambda &\Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \\
2^\lambda < \kappa &\Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.
\end{aligned}
$$

kuralları kullanılabilir. (Tekrar $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, ve $\aleph_0 \leqslant$ maks$\{\kappa, \lambda\}$ olmalıdır.) Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
$$2^{\aleph_0} < \kappa \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} \leqslant 2^{\kappa}.$$

Şimdi aşağıdaki tanım yapabiliriz.

$$\beth_0 = \aleph_0,$$
$$\beth_{\alpha'} = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha},$$
$$\alpha \text{ limit ise } \beth_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \beth_\xi.$$

(Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.) O zaman $\xi \mapsto \beth_\xi$ normaldir, ve

$$\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha.$$

Teorem 72. *Tüm κ ve λ için*

$$2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1},$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^{\lambda} = \beth_{\alpha+1}.$$

Alıştırma 67. Teoremi kanıtlayın.

Kontinuum Hipotezi veya **KH,** $\aleph_1 = \beth_1$ önermesidir. **Genelleştirilmiş Kontinuum Hipotezi** veya **GKH,** $\forall\xi\ \aleph_\xi = \beth_\xi$ önermesidir. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, GKH doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, KH yanlıştır. Bu şekilde KH, ZFC'den bağımsızdır.

A. Harfler

Metinde simge olarak kullanılırken harfler aşağıdaki anlamlara gelir.

"Tahta siyahı" harfleri

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi

$\mathbb{N}$ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sayma sayılar kümesi

Küçük Latin harfleri

a, b, c, d, e sayılar veya kümeler

f, g, h kümede tanımlanmiş göndermeler

i, j doğal sayı değişkenler

k, ℓ, m, n doğal sayılar

p asal sayı

u, x, y, z sayı veya küme değişkenleri

Dikey küçük Latin harfleri

sup supremum

min minimum (en küçük)

maks maksimum (en büyük)

Büyük Latin harfleri

A, B, C, D kümeler

X, Y, Z küme değişkenleri

Kıvırcık Latin harfleri

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ elemanları küme veya gönderme olan kümeler

$\mathscr{P}(A)$ $\{X\colon X \subseteq A\}$

$\mathscr{P}_\omega(A)$ $\{X \in \mathscr{P}(A)\colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$

Büyük siyah Latin harfleri

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sınıflar

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ sınıfta tanımlanmış göndermeler

Dikey büyük siyah Latin harfleri

$\mathbf{V}$ evrensel sınıf

$\mathbf{ON}$ ordinaller sınıfı

$\mathbf{KN}$ kardinaller sınıfı

Yunan harfleri

α, β, γ, δ, θ ordinaller

ξ, η, ζ ordinal değişkenler

κ, λ, μ, ν kardinaller

φ, ψ, χ formüller

Dikey Yunan harfi

ε_0 $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$

ω $\{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayıları kümesi

Harflerden türeyen simgeler

$\in$ eleman olma bağıntısı ("a **ἐστὶ** B" demek "a, bir B'dir")

$\forall$ her . . . için (*for* ***A****ll*)

$\exists$ bazı . . . için (*there* ***E****xists*)

$\cup$, $\bigcup$ bileşim (***U****nion*)

B. Mantık

B.1. Formüller

Formüllerde kullandığımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, $\dots$; x_0, x_1, x_2, $\dots$;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, $\dots$; a_0, a_1, a_2, $\dots$;
3) **iki-konumlu bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;*
4) bir **tek-konumlu bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, özyinelidir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ bir formül ise, o zaman

$$\neg\varphi$$

ifadesi de bir formüldür.

*Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\to$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır.

3. Eğer φ ile ψ iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

ifadeleri de formüldür.

4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad\qquad \forall x\ \varphi$$

ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi\wedge\psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **gerektirme** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 73. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem gerektirme, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, gerektirme değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, gerektirmedir.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bir şekilde birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki özyineli tanımı yapabiliriz. Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir iki-konumlu bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

B.2. Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her *serbest* geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \wedge \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.
7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a kümesi için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane kısaltma daha kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\boldsymbol{x}$ listesini oluştururursa, o zaman formül

$$\varphi(\boldsymbol{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad \exists \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\boldsymbol{a}$, uzunluğun $\boldsymbol{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\boldsymbol{x})$ ile $\psi(\boldsymbol{x})$, iki formül ise, ve *sadece doğruluğun tanımını kullanarak*

$$\forall \boldsymbol{x}\ \big(\varphi(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*): kısaca

$$\varphi \quad \text{denktir} \quad \psi.$$

Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\boldsymbol{a}$ sabit listesi için, *doğruluğun tanımına göre*

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}
\varphi \vee \psi \quad \text{denktir} \quad \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\
\varphi \Rightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad \neg\varphi \vee \psi, \\
\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi), \\
\forall x\ \varphi \quad \text{denktir} \quad \neg\exists x\ \neg\varphi.
\end{gathered}$$

Ama $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Rightarrow x \in y\big)$ ile $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\big)$, denk değildir.

Teorem 74.

1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 75.

1. *$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ denktir.*

2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman*

$$\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \textit{denktir} \quad \varphi \Rightarrow \forall x\ \psi.$$

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.
Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.
Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

C. Kofinallik

C.1. Tanım ve özellikler

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup\{\xi\colon \xi < \kappa\} = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_x\colon x \in \omega\}.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall\xi\ \bigl(\xi < \alpha \Rightarrow \exists\eta\ (\eta \in b \land \xi < \eta)\bigr)$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*) altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_x\colon x \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalinin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\mathrm{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x)\colon x \subseteq \alpha \land \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\mathrm{kf}(0) = 0, \qquad\qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 76. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi* $\mathrm{kf}(\alpha)$ *olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \mathrm{maks}\Big(f(\beta), \sup\big(g[\beta]\big)\Big)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 77. *α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f\colon \alpha \to \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman*

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \mathrm{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ ve $\bigcup g[\mathrm{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\mathrm{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \qquad\qquad \delta < f(\theta) < f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $\bigcup(f \circ g)[\mathrm{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$.

2. $h\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \beta$ ve $\bigcup h[\operatorname{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \operatorname{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\operatorname{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f(k(\delta)),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\operatorname{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ ve aslında $\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta)$. □

Özel durum olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limit ise

$$\operatorname{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \operatorname{kf}(\alpha).$$

Teorem 78. *α limit ise $\operatorname{kf}(\aleph_\alpha) = \operatorname{kf}(\alpha)$.*

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. □

Teorem 79. *Cantor normal biçiminde*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa,} \\ \operatorname{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta + \alpha) = \operatorname{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \operatorname{kf}(\delta^\alpha).$$ □

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots\}$$

ise, o zaman $\mathrm{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^{\alpha}$.

Teorem 80. *Her α ordinali için*

$$\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f\colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^{\xi}\aleph_\alpha \colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_\alpha$ kümesinin en küçük *gömmesi*, g_δ olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta \colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \big(g_\beta(\delta), g_\delta(\gamma)\big)$$

olsun. Böylece

$$\mathrm{kard}\big(\sup(f[\beta])\big) \leqslant \mathrm{kard}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha,$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

C.2. Hesaplamalar

Teorem 81. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \text{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda},$$
$$\mathrm{GKH} \wedge \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^{\lambda}.$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_\xi \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_\xi \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Bigl(\kappa \smallsetminus \bigl\{g_\xi(\eta) \colon \xi < f(\eta)\bigr\}\Bigr)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \mathrm{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 80'in kanıtındaki gibi

$$\begin{aligned}{}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi \\ \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}(\mathrm{kard}(\xi)) = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2.\end{aligned}$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^\lambda \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{gathered}2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda,\\ \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa,\\ 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.\end{gathered}$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise},\\ \kappa^+, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise},\\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise}.\end{cases}$$

Özel olarak

$$\text{GKH} \Rightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \text{ ise,} \\ \aleph_\alpha, & \text{eğer } \aleph_\beta < \mathrm{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$