Ordinal Analiz

David Pierce

7 Mart 2016 taslağı

İçindekiler

1 Gerçel Analiz

Gerçel sayılar, tam sıralı $\mathbb{R}$ cismini oluşturur, yani

1) $<$ bağlantısı tarafından $\mathbb{R}$ doğrusal sıralanmıştır;
2) bu sıralama **tamdır,** yani boş olmayan, üstsınırı olan $\mathbb{R}$'nin her altkümesinin **supremumu** (en küçük üstsınırı) vardır;
3) toplama ($+$) ve carpma ($\times$ veya $\cdot$) altında $\mathbb{R}$ bir cisimdir;

4) sıfır olmayan her gerçel a sayısı için

$$a > 0 \iff -a < 0;$$

5) her iki pozitif gerçel sayının toplamı ve çarpımı pozitiftir.

$\mathbb{R}$'nin bu özelliklerini, şimdilik $\mathbb{R}$'nin *aksiyomları* olarak kabul ediyoruz. (Sonra, *küme aksiyomlarını* kullanarak gerçel sayıları inşa edebileceğiz.)

$\mathbb{R}$'nin her A altkümesi için

1) $1 \in A$ ve
2) A'nın her b elemanı için $b + 1 \in A$

durumunda A'ya **tümevarımlı** densin. O zaman tanımı göre

$$\mathbb{N} = \bigcap\{X \subseteq \mathbb{R} \colon X \text{ tümevarımlıdır}\}$$

olsun, yani **sayma sayısı** olmak için gerek ve yeter koşul, $\mathbb{R}$'nin her tümevarımlı altkümesinin elemanı olmaktır.

Teorem 1 (Tümevarım)**.** *$\mathbb{N}$ tümevarımlıdır. Ayrıca $\mathbb{N}$'nin tek tümevarımlı altkümesi, kendisidir.*

Lemma 1. *En küçük sayma sayısı vardır, ve bu sayı 1'dir.*

Lemma 2. *Her sayma sayısı, ya 1'dir, ya da bir k sayma sayısı için $k + 1$'dir.*

Lemma 3. *Herhangi k ve m sayma sayıları için*

$$k \leqslant m \Rightarrow k < m + 1.$$

Teorem 2 (Güçlu tümevarım)**.** *$A \subseteq \mathbb{N}$ olsun, ve tüm k sayma sayıları için*

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x < k\} \subseteq A \Rightarrow k \in A$$

olsun. O zaman $A = \mathbb{N}$.

Teorem 3 (İyisıralama)**.** $\mathbb{N}$ ***iyisıralıdır,*** *yani* $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır.*

Teorem 4 (Özyineleme)**.** *Bir A kümesi için*

1) $b \in A$,
2) $f\colon A \to A$

olsun. O zaman $\mathbb{N}$*'den A'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için*

1) $g(1) = b$,
2) *her k sayma sayısı için* $g(k+1) = f(g(k))$.

2 Ordinal sayılar

Küme aksiyomlarını kullanarak gerçel sayılar gibi *ordinal sayıları* inşa edebileceğiz. Şimdilik onların var olduğunu varsayıyoruz. **Ordinal sayılar** veya **ordinaller,**

ON

sınıfını oluşturur. Her sınıf, $\{x\colon \varphi(x)\}$ biçimindedir, yani bir sınıfın elemanları, *tek serbest değişkeni olan bir formülü* sağlayan kümelerdir. Özel olarak her a kümesi, $\{x\colon x \in a\}$ sınıfıdır.

Teorem 5 (Russell Paradoksu)**.** *$\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, küme değildir.*

ON'nin aksiyomlarına göre

1) en az bir ordinal vardır;

2) **ON** iyisıralıdır;
3) her ordinal için, daha büyük ordinal vardır;
4) **ON**'nin herhangi altkümesinin üstsınırı vardır;
5) Herhangi α ordinali için $\{\xi \in \mathbf{ON} \colon \xi < \alpha\}$ sınıfı bir kümedir.

Burada α, β, ve γ sabitleri ve ξ değişkeni her zaman ordinal olacaktır. Örneğin $\{\xi \in \mathbf{ON} \colon \xi < \alpha\} = \{\xi \colon \xi < \alpha\}$.

Teorem 6 (Burali-Forti Paradoksu)**. ON** *küme değildir.*

Kanıt. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan **ON**'nin üstsınırı yoktur. **ON**'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan **ON**'nin kendisi küme olamaz. □

En küçük ordinal 0 olarak kabul edilir. Ayrıca, sayma sayılar ordinal olarak kabul edilir, ama $\mathbb{R}$'de başka ordinal yoktur. Yani gerçel olan ordinaller, *doğal sayılardır.* Herhangi α ordinali için, tanıma göre

$$\alpha' = \min\{\xi \colon \alpha < \xi\}.$$

Burada α', α'nın **ardılıdır.** O zaman α'nın ardılı, α'dan büyük olan ordinallerin en küçüğüdür. Örnegin

$$0' = 1, \qquad 1' = 2, \qquad 2' = 3, \qquad 3' = 4,$$

ve saire. Ne sıfır ne bir ardıl olan ordinal, bir **limittir.**

Teorem 7. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

En küçük limit

$$\omega$$

olsun. O zaman $\{\xi : \xi < \omega\}$, doğal sayılar kümesidir. Sınıflar, siyah harfler ile yazacağız.

Teorem 8 (Ordinal Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$*,*
2) $\boldsymbol{A}$*'nın her* β *elemanı için* $\beta' \in \boldsymbol{A}$*, ve*
3) her γ *limiti için*

$$\{\xi : \xi < \gamma\} \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \gamma \in \boldsymbol{A}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$*.*

Kanıt. $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. □

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$'nın *altkümeleri* tarafından oluşturulmuş sınıftır.

Teorem 9 (Ordinal Özyineleme)**.** *Bir* $\boldsymbol{A}$ *sınıfı için*

1) $b \in \boldsymbol{A}$*,*
2) $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$*,*
3) ve $\boldsymbol{G} : \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A}$

olsun. O zaman $\mathbf{ON}$*'den* $\boldsymbol{A}$*'ya giden bir ve tek bir* $\boldsymbol{H}$ *göndermesi için*

1) $\boldsymbol{H}(0) = b$*,*
2) her α *ordinali için* $\boldsymbol{H}(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha))$*,*
3) her α *limiti için* $\boldsymbol{H}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\{\boldsymbol{H}(\xi) : \xi < \alpha\})$*.*

Şimdi $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Eğer

1) $\boldsymbol{F}$ **kesin artan,** yani $\alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\beta)$, ve
2) her α limiti için $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$'ye **normal** densin.

Teorem 10. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve kesin artan olsun. O zaman* $\boldsymbol{F}$ *normaldir ancak ve ancak süreklidir.*

Teorem 11. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve normal olsun. O zaman* $\mathbf{ON}$*'nin her A altkümesi için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(A)) = \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi).$$

2.1 Toplama

Tanıma göre her α ordinali için

$$\begin{gathered} \alpha + 0 = \alpha, \\ \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \\ \gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi\colon \xi < \gamma\}. \end{gathered}$$

Özel olarak

$$\alpha + 1 = \alpha'.$$

Teorem 12. *Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.*

Teorem 13. *Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.*

Teorem 14. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Teorem 15 (Çıkarma). *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Teorem 16. *Ordinaller toplaması birleşmelidir.*

Ordinal toplama değişmeli değildir çünkü

$$1 + \omega = \sup_{x<\omega}(1 + x) = \omega < \omega + 1.$$

2.2 Çarpma

Tanımına göre her α için

$$\begin{gathered} \alpha \cdot 0 = 0, \\ \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha, \\ \gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \gamma\}. \end{gathered}$$

Özel olarak

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

O zaman $\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = \sup\{\omega + x \colon x \in \omega\}$, ama

$$2 \cdot \omega = \sup_{x\in\omega}(2 \cdot x) = \omega,$$

dolayısıyla $2 \cdot \omega < \omega \cdot 2$. Öyleyse çarpma değişmeli değildir.

Teorem 17. *$0 \cdot \alpha = 0$ ve $1 \cdot \alpha = \alpha$.*

Teorem 18. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemi normaldir.*

Teorem 19. *Ordinaller çarpması, toplama üzerine soldan dağılır, yani*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Teorem 20. *Ordinaller çarpması birleşmelidir.*

Teorem 21. *Her $\xi \mapsto \xi \cdot \alpha$ işlemi artandır.*

Teorem 22 (Bölme)**.** $1 \leqslant \alpha$ *ise* (ξ, η) *için*

$$\alpha \cdot \xi + \eta = \beta \wedge \eta < \alpha$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

2.3 Kuvvet alma

Her α için, $\alpha > 0$ ise, tanımına göre,

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \gamma\}.$$

Özel olarak

$$\alpha^1 = \alpha.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$0^0 = 1, \qquad \beta > 0 \Rightarrow 0^\beta = 0.$$

Teorem 23.

1. $1^\alpha = 1$.
2. $\alpha \geqslant 1$ *ise* $\xi \mapsto \xi^\alpha$ *artandır.*
3. $\alpha \geqslant 2$ *ise* $\xi \mapsto \alpha^\xi$ *işlemi, normaldir.*
4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.
5. $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.