Kümeler kuramı

David Pierce

8 Şubat 2016

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Bu notları,
MAT 340 kodlu
Aksiyomatik Kümeler Kuramı dersi için
yazıyorum.
Lütfen hataları bana bildirin.

İçindekiler

Şekil Listesi

1. Giriş

1.1. Sayma ve ordinaller

Bir torbada birkaç tane satranç taşımız var, onları teker teker çekiyoruz, ve aynı zamanda sayılar diyoruz:

1: piyade (*pawn*);
2: kale (*rook*);
3: at (*knight*);
4: fil (*bishop*);
5: vezir (*queen*);
6: şah (*king*).

Bu şekilde taşları *saymış olduk.* Sonuç olarak 6 tane taşımız var deriz. Ama taşları belli bir *sırada* çektik. Başka bir sıra mümkündü. Taşları tekrar çantaya koyup çekiyoruz:

1: piyade;
2: at;
3: vezir;
4: kale;
5: fil;
6: şah.

Son taşı çekince yine 6 numarasını diyoruz. Her zaman öyle olacak: her zaman taşları sayınca 6'ya kadar sayacağız. Ama nasıl biliyoruz?

Saymak nedir? Saymanın nesnesi, bir **topluluktur** (*collection*).* Bir topluluğu sayınca aslında onu **sıralıyoruz** (*order*).

A bir topluluk olsun, ve R, onun bir **sıralaması** (*ordering*) olsun. O zaman A topluluğunun **elemanları** (*elements*) veya **öğeleri**

*__Kümeler__ (*sets*), özel topluluk olacak.

(*members*) vardır; ve bu topluluğun tüm b, c, ve d elemanları için

1) $b\ R\ b$ değil, yani
$$\neg\, b\ R\ b;$$
2) $b\ R\ c$ ve $c\ R\ d$ ise $b\ R\ d$, yani
$$b\ R\ c \wedge c\ R\ d \Rightarrow b\ R\ d;$$
3) b ve c birbirinden farklıysa ya $b\ R\ c$ ya da $c\ R\ b$, yani
$$b = c \vee b\ R\ c \vee c\ R\ b.$$

Böylece R,

1) **yansımasız** veya **dönüşsüz** (*irreflexive*),*
2) **geçişli** veya **geçişken** (*transitive*),† ve
3) **doğrusal** (*linear*) veya **tam** (*total*)

bir bağıntıdır. O zaman (A, R) sıralı ikilisi, bir **sıradır.** Bu sıra, A **topluluğunun bir sırasıdır.**

Şimdi A, satranç taşları torbamız olsun. O zaman A topluluğunun tüm sıraları, birbiriyle **izomorftur** (*isomorphic*). Demek ki R ile S, A topluluğunun iki sıralamasıysa, o zaman A topluluğundan kendisine giden öyle bir birebir ve örten f göndermesi vardır—yani A topluluğunun öyle bir f **permütasyonu** (*permutation*) veya **eşleşmesi** vardır—ki A topluluğunun tüm b ile c elemanları için
$$b\ R\ c \Leftrightarrow f(b)\ S\ f(c)$$
denkliği doğrudur. Ama bunu nasıl biliyoruz?

Şimdi A, pozitif *tamsayılar* topluluğu olsun. Yani $A = \mathbb{N}$ olsun. Bu topluluğun alışılmış "doğal" $<$ sıralaması vardır. Ama başka sıralamaları da vardır. Mesela $\mathbb{N}$ topluluğunun öyle bir R **bağıntısı**

---

*Işık, bir aynadan yansır; ses, bir kayalıktan yansır. *Yıkanmak* fiili, *kendi kendini yıkamak* öbeğinin anlamına gelirse, dönüşlüdür; *yıkanılma* fiilinin anlamına gelirse, edilgendir [14, 20].

†*Kaynatmak* fiili geçişlidir, çünkü bir nesne ister; *kaynamak* geçişsizdir.

veya **ilişkisi** (*relation*) vardır ki topluluğun tüm k ile m elemanları için

$$k\ R\ m \Leftrightarrow (1 < k \land k < m) \lor (1 = m \land m < k)$$

denkliği doğrudur. Öyleyse R bağıntısı, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor; aslında R sıralaması, $<$ sırası ile hemen hemen aynıdır, ancak R sırasına göre 1 elemanı, $\mathbb{N}$ topluluğunun *son* elemanıdır. O zaman $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, R)$, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	…;	?
R	2,	3,	4,	…;	1

Şimdi

$$k\ S\ m \Leftrightarrow (2 \mid k + m \land k < m) \lor (2 \nmid k \land 2 \mid m)$$

olsun. O zaman $k\ S\ m$ ancak ve ancak
1) hem k hem m ya tek ya çift, ve $k < m$, veya
2) k tek ve m çift.

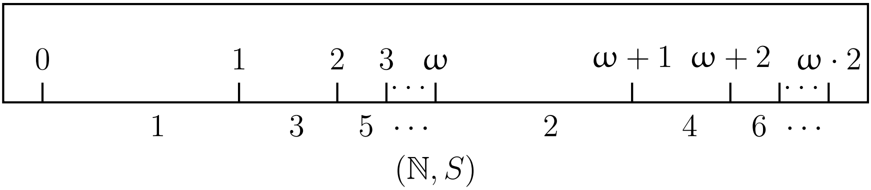
O zaman S bağıntısı da, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor, ama $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, S)$ sıraları, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	…;	?	?	?	…
S	1,	3,	5,	…;	2,	4,	6,	…

$\mathbb{N}$ topluluğu sayılabilir mi? Normalde, sayarken, sayılar diyoruz. R sıralamasına göre $\mathbb{N}$ topluluğunu sayınca 1 için hangi sayıyı diyebiliriz? Yani yukarıdaki ilk tablonun alt satırındaki 1 numarasının üstünde, soru işaretinin yerine hangi sayıyı koyabiliriz? Bu sayı

$$\omega + 1$$

olacak. Ondan sonra $\omega+2$, $\omega+3$, vesaire sayıları olacak; bunlardan sonra, $\omega + \omega$, yani $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, vesaire sayıları olacak. Ama $\mathbb{N}$ topluluğunun sadece ω tane elemanı olacak. Burada 0 gibi ω, cetvelin noktası olarak düşünülebilir; Şekil 1'e bakın. Burada



Şekil 1. Sayan sonsuz cetvel

$$0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots; \qquad \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots$$

numaraları, **ordinal sayılar** veya **ordinallerdir:** her ordinal, bu sırada bulunacak. Ayrıca

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad\qquad \omega$$

numaraları, **kardinal** (*cardinal*) **sayılar** veya **kardinaldirler,** ama başka kardinaller olacak. Ayrıca $\omega + 1$, bir kardinal değildir.

Her kardinal, bir ordinal olacak; ama bazı ordinaller, kardinal olmayacak.

Her ordinal, bir **küme** olacak; ama bazı kümeler, ordinal olmayacak.

Her **küme,** bir topluluk olacak; ve her kümenin her elemanı, bir küme olacak. O zaman a ile b kümeyse, ya a kümesi, b kümesinin elemanıdır, ya da elemanı değildir. İlk durumda b kümesi, a kümesini **içerir** (*contains*), yani a kümesi, b kümesi tarafından **içerilir,** ve

$$a \in b$$

ifadesini yazarız;* ikinci durumda b kümesi, a kümesini **içermez,** ve

$$a \notin b$$

---

*Buradaki $\in$ işareti, Yunan ϵ (epsilon) harfinden türer. Bu harf, *ἐστί* kelimesinin ilk harfidir, ve *A ἐστί B* cümlesi, "*A*, *B*'dir" (*A is B*) anlamına gelir. Epsilonun bu kullanışını, Peano [18] ortaya koymuştur.

ifadesini yazarız. Genelde C bir topluluk ise, ya $a \in C$ ya da $a \notin C$.

Bize göre **boş bir topluluk**—elemanları olmayan bir topluluk—vardır, ve bu topluluk, bir kümedir. Bu varsayım, **Boş Küme Aksiyomudur** (*Empty Set Axiom*). Boş kümenin işareti,

$$\varnothing.$$

Ayrıca a ile b kümeyse, o zaman öyle bir küme vardır ki her elemanı, ya a kümesinin bir elemanı, ya da b kümesinin kendisidir. Bu yeni kümenin ifadesi,

$$a \cup \{b\}.$$

Bu topluluğun küme olduğu, **Bitiştirme Aksiyomudur** (*Adjunction Axiom*).* Burada a boş ise, yeni $a \cup \{b\}$ kümesi,

$$\{b\}$$

olarak yazılır. O zaman aşağıdaki gibi kümelerimiz vardır:

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}, \quad \Big(\{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}\Big) \cup \Big\{\{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}\Big\}.$$

Bu ifadelerin yerine

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}$$

ifadelerini yazabiliriz. Aslında 0sayısını $\varnothing$ olarak tanımlarız, yani

$$0 = \varnothing.$$

Bu sayı, **ilk ordinaldir.** Her α ordinali için bir sonraki ordinal olacak, ve bu ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ olacak. Mesela 0'dan bir sonraki ordinal $\{0\}$ olacak; yani

$$1 = \{0\}$$

*Bu aksiyom, Tarski ve Givant [25, p. 223, QIII] kaynağında bulunur; İngilizce adı, Boolos [2, p. 100] kaynağında bulunur.

olacak. Ayrıca her α ordinal için

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

olacak. Ama bildiğimiz gibi

$$1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4,$$

vesaire. O zaman

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

vesaire. Böyle tanımlanmış sayılar, **von Neumann doğal sayılarıdır** (*von Neumann natural numbers* [27]). Bu sayılar, bir topluluğu oluşturacak, ve bu topluluk, ω olacak. Yani ω, öyle bir topluluktur ki

1) $0 \in \omega$,
2) $\alpha \in \omega$ ise $\alpha + 1 \in \omega$, ve
3) ω topluluğunun başka elemanı yoktur.

Öyleyse ω topluluğunun tanımı, **özyineli** veya **rekürsiftir** (*recursive*).

1.2. Ordinaller Hesapları

Sonsuzluk Aksiyomuna* (*Axiom of Infinity* [29]) göre ω topluluğu, bir küme olacak. O zaman ω bir ordinal olacak, ve bu ordinalin her k elemanı için $\omega + k$ kümesi, bir ordinal olacak.

Aslında tüm α ile β ordinaller için

$\alpha + \beta$ toplamını, $\alpha \cdot \beta$ çarpımını, ve α^β kuvvetini

*Veya **Sonsuz Küme Aksiyomu** [16].

tanımlayacağız. O zaman

$$\begin{gathered} 1+\omega=\omega<\omega+1, \\ 2\cdot\omega=\omega<\omega\cdot 2, \\ (\omega+1)^{\omega}=\omega^{\omega}<\omega^{\omega+1} \end{gathered}$$

olacak. Aslında:

- $1+\omega$ toplamı,

$$(0,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega+1$,

$$(0,1,2,3,\dots,0)$$

sırasının ordinalidir.

- $2\cdot\omega$ çarpımı,

$$(0,1,0,1,0,1,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega\cdot 2$,

$$(0,1,2,3,\dots,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir; ayrıca

$$\begin{gathered} 2\cdot\omega=2+2+2+\cdots, \\ \omega\cdot 2=\omega+\omega=\omega+1+1+1+\cdots \end{gathered}$$

(sayfa 15'e bakın).

- $(\omega+1)^{\omega}$ kuvveti,

$$((\omega+1)^2,(\omega+1)^3,(\omega+1)^4,\dots)$$

dizisinin **limitidir,** ve

$$\begin{aligned} (\omega+1)^2 &= (\omega+1)\cdot(\omega+1) \\ &= (\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)\cdot 1 \\ &= (\omega+1+\omega+1+\omega+1+\cdots)+\omega+1 \\ &= (\omega+\omega+\omega+\cdots)+\omega+1 \\ &= \omega^2+\omega+1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\omega+1)^3 &= (\omega+1)^2\cdot(\omega+1)\\
&= (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega+1)\\
&= (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+\omega^2+\omega+1\\
&= (\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\
&= (\omega^2+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\
&= \omega^3+\omega^2+\omega+1,
\end{aligned}
$$

ve genelde

$$(\omega+1)^n = \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1.$$

Ayrıca her pozitif α ordinali için öyle bir ℓ doğal sayısı, ve α_0, …, α_ℓ ordinalleri, ve a_0, …, a_ℓ pozitif doğal sayıları vardır ki

$$\alpha_0 > \cdots > \alpha_\ell, \qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell.$$

Burada $\omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell$ ifadesi, α ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Her pozitif ordinalin tek bir Cantor normal biçimi vardır. Bundan hesaplama kuralları türeyebilir.

1.3. Kümeler ve Sınıflar

Her topluluk, bir küme değildir. Örneğin öyle bir R topluluğu vardır ki her elemanı bir küme, ama bu küme, kendisinin elemanı değildir. Yani

$$R = \{x\colon x \notin x\}.$$

Burada x değişkeni her zaman bir küme olacak. Şimdi a bir küme olsun. Eğer $a \in a$ ise, o zaman $a \notin R$, dolayısıyla $a \neq R$. Eğer $a \notin a$ ise, o zaman $a \in R$, dolayısıyla $a \neq R$. Her durumda R topluluğu, a kümesi değildir. Yani R, bir küme değildir. Bu teoreme **Russell Paradoksu** denir [21].

Elemanları küme olan bazı topluluklar, **sınıf** olacak. Her küme, bir sınıftır, ancak bazı sınıflar, küme değildir. Mesela yukarıdaki gibi $\{x\colon x \notin x\}$ topluluğu, bir sınıftır, ama gösterdiğimiz gibi küme değildir. Tanıma göre her sınıf,

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\varphi(x)$, kümeler kuramının mantığında bir **formüldür.** Eğer a bir kümeyse, o zaman $\varphi(a)$ ifadesi, bir **cümledir.** Her cümle, ya doğru ya yanlıştır. Bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfının elemanları, $\varphi(a)$ cümesini doğru yapan a kümeleridir. Bu sınıf, $\varphi(x)$ formülü tarafından **tanımlanır.**

Bir $\varphi(x)$ formülünün bir ve tek bir **serbest değişkeni** vardır, ve bu değişken, x olur. Ancak bir formülün birden fazla serbest değişkeni olabilir. Örneğin

$$\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

ifadesi, bir formüldür, ve serbest değişkenleri, x ile y olur. Bu formülde z, **bağlantılı değişkendir.** Formül, kümelerin **eşitlik** bağıntısını tanımlar. Yani a ile b kümeleri birbirine eşittir, ancak ve ancak

$$\forall z\ (z \in a \Leftrightarrow z \in b),$$

yani elemanları aynıdır. Küme olmayan bir sınıfın olduğunu kanıtlarken, bu kuralı kullandık. Yukarıdaki $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün yerine

$$x = y$$

ifadesini yazarız. O halde bir $\{x\colon x = x\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf, tüm kümelerin sınıfıdır. Bu sınıf, **evrensel sınıftır** (*universal class*), ve işareti,

$$\mathbf{V}$$

olacak. Ayrıca a bir kümeyse, o zaman bir $\{x\colon x \in a\}$ sınıfı vardır, ama bu sınıf, a kümenin kendisidir, yani

$$a = \{x\colon x \in a\}.$$

Öyleyse, dediğimiz gibi, her küme, bir sınıftır.

Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmadan ω topluluğunun sınıf olduğu apaçık değildir, ama sınıf olacaktır. Ondan sonra Sonsuzluk Aksiyomu, $\exists x\ x = \omega$ biçiminde olabilecektir.

Aslında ω sınıfı bir küme olduğundan, **Yerleştirme Aksiyomuna** (*Replacement Axiom*)* göre $\{y\colon \exists x\ (x \in \omega \wedge y = \omega + x)\}$ sınıfı, bir küme olacaktır. Bu küme

$$\{\omega + x\colon x \in \omega\}$$

olarak yazılabilir. **Bileşim Aksiyomuna** (*Union Axiom* [29]) göre bu kümenin

$$\bigcup\{\omega + x\colon x \in \omega\} \qquad \text{veya} \qquad \bigcup_{x\in\omega}(\omega + x)$$

bileşimi de bir kümedir; tanıma göre bu bileşim, $\omega+\omega$ toplamıdır.

Kümelerden oluşturulmuş bazı topluluklar, sınıf değildir. Bu sonuç, **Gödel'in Eksiklik Teoremi** (*Gödel's Incompleteness Theorem*
[11]) veya **Tarski'nin Doğruluğun Tanımlanamaması Teoremi** (*Tarski's Theorem on the Indefinability of Truth* [24]) gibidir. Bu teoremlerin asıl biçimleri, $\mathbb{N}$ topluluğu hakkındadır, ve bu biçimde teoremlerini kanıtlamak zordur. Fakat bu teoremler, $\mathbf{V}$ hakkında yazılabilir; ve bu biçimde onları kanıtlamak daha kolaydır.

Tüm ordinallerin topluluğu, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{ON}$$

olacak. Aslında bu sınıf, bir a kümesiyse, o zaman $a \in \mathbf{ON}$ olurdu, yani $a \in a$ olurdu; ama bir ordinal için bu içerme imkânsızdır. Sonuç olarak **ON**, bir küme değildir. Bu teorem, **Burali-Forti Paradoksu** [3] olarak bilinir.

*Skolem [23], 1922 yılında bu aksiyomu tavsiye etti; aynı yılda Fraenkel, benzer bir aksiyomu tavsiye etmiş. Ayrıca Cantor'a [4, p. 114] bakın.

1.4. Kardinaller

ON sınıfının bir sıralaması vardır, ve bu sıralama, *içerilmedir,* yani $\in$ ile gösterilen sıralamadır. **Seçim Aksiyomuna** (*Axiom of Choice* [29]) göre, her a kümesinden bir β ordinaline giden bir **eşleme** (yani bir birebir örten gönderme) vardır. O halde

$$a \approx \beta$$

ifadesini yazalım, ve a ile β kümelerine **eşlenik** densin [16, s. 82]. Eğer a verilirse, ve $a \approx \beta$ koşulunu sağlayan β ordinallerinin en küçüğü κ ("kappa") ise, o zaman κ, a kümesinin **kardinalidir.** Tüm kardinallerden oluşturulmuş topluluk, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{KN}$$

olacak. En küçük *sonsuz* kardinal, ω olur. **ON** sınıfından **KN** sınıfına giden bir

$$\xi \mapsto \aleph_\xi$$

göndermesi vardır. Burada

$$\aleph_0 = \omega \qquad\qquad \text{ve} \qquad\qquad \alpha < \beta \Leftrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta,$$

ve her sonsuz kardinal, bir α ordinali için, $\aleph_\alpha$ biçimindedir. İki kardinalin *kardinal* toplamı ve *kardinal* çarpımı vardır, ama

$$\aleph_\alpha \oplus \aleph_\beta = \aleph_\alpha \otimes \aleph_\beta = \aleph_{\text{maks}\{\alpha,\beta\}}$$

Ayrıca $1 \leqslant k < \omega$ ise $\aleph_\alpha \oplus k = k \oplus \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \otimes k = k \otimes \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Genelde siyah harfler, sınıfları gösterecek. Şimdi $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, sınıf olsun.Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfının her elemanı, $\boldsymbol{B}$ sınıfının elemanıysa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **$\boldsymbol{B}$ sınıfının altsınıfı** (*subclass of the class B*) denir, ve

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

ifadesi yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{B}$ sınıfı, $\boldsymbol{A}$ sınıfını **kapsar** (*includes*). İçerilme ($\in$) ve kapsanma ($\subseteq$) ilişkileri, birbirinden tamamen farklıdır.

Ayırma Aksiyomuna (*Separation Axiom* [29]) göre, her *kümenin* her altsınıfı, bir kümedir. Şimdi, eğer $\varphi(x)$ bir formül ise, ve a bir kümeyse, o zaman öyle bir sınıf vardır ki her elemanı, hem a kümesinin elemanıdır, hem de $\varphi(x)$ formülünü sağlar. Bu sınıf,

$$\{x \in a \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır. Ayırma Aksiyomuna göre, bu sınıf, bir kümedir. O zaman bu küme, a **kümesinin bir altkümesidir** (*a subset of the set* a).

Bir a kümesinin tüm altkümeleri, bir sınıf oluşturur. Bu sınıf, a kümesinin **kuvvet sınıfıdır** (*power class*), ve

$$\mathscr{P}(a)$$

olarak yazılır. **Kuvvet Kümesi Aksiyomuna** (*Power Set Axiom* [29]) göre, bu sınıf, her zaman bir kümedir. **Cantor'un Teoremine*** göre, her kümenin kuvvet kümesi, kümeden kesinlikle daha büyüktür, yani kardinali daha büyüktür. Bu teorem,

$$a \prec \mathscr{P}(a)$$

ifadesiyle söylenir.

Eğer a ile b, iki kümeyse, o zaman a kümesinden b kümesine giden göndermeler topluluğu, bir kümedir, ve bu küme

$${}^{a}b$$

olarak yazılabilir. O zaman ${}^{a}2 \approx \mathscr{P}(a)$. Eğer κ ile λ, iki kardinal ise, tanıma göre

$$\kappa^{\lambda}$$

*Levy'ye [13] göre Cantor, bu teoremi 1892 yılında yayımladı.

kuvveti, ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin kardinalidir. Eğer $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ ise, o zaman

$$2^{\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa \cdot \lambda} = 2^{\lambda};$$

özel olarak $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$.

Şimdi $\mathbb{Z}$, **tamsayılar** topluluğu olsun. O zaman $\mathbb{Z} \approx \omega$, çünkü tamsayılar, sonsuz bir

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots$$

listesinde yazılabilir. Ayrıca her tamsayı, ω kümesinin elemanları gibi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu göstermek için, eğer a ile b, herhangi iki kümeyse, o zaman

$$(a, b)$$

sıralı ikilisi (*ordered pair*), $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ kümesi olarak tanımlanır.* O zaman $n \in \omega$ ve $n > 0$ ise, o zaman $-n$ tamsayısı, $(0, n)$ olarak tanımlanabilir.

Başka yöntemle $\mathbb{Z}$ topluluğunun her r elemanını,

$$\{(x, y) \in \omega \times \omega \colon x = y + r\}$$

olarak tanımlanabiliriz. Bu tanıma göre $\mathbb{Z}$ topluluğunun her elemanı, bir **denklik sınıfıdır.** Aslında $\omega \times \omega$ çarpımında öyle bir E **denklik bağıntısı** vardır ki

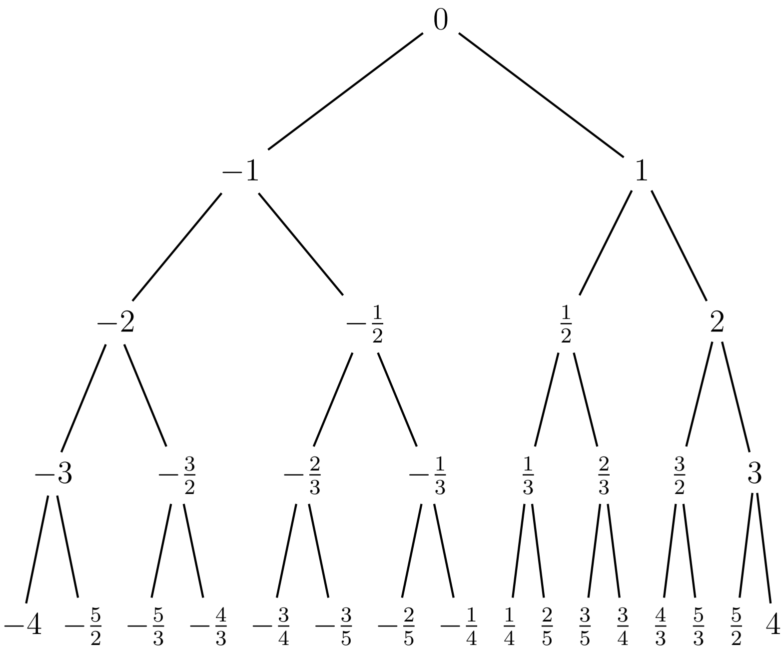
$$(a, b) \; E \; (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c,$$

ve $\mathbb{Z}$ topluluğu, $(\omega \times \omega)/E$ bölümü olarak tanımlanabilir.

Öyleyse $\mathbb{Z}$ topluluğu, bir sınıftır. O zaman Yerleştirme Aksiyomuna göre $\mathbb{Z}$, bir küme olmalı, çünkü $\mathbb{Z} \approx \omega$.

Benzer şekilde $\mathbb{Q}$ **kesirli sayılar** topluluğu, öyle bir $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/F$ bölümüdür ki

$$(a, b) \; F \; (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$



Şekil 2. Stern–Brocot Ağacı

Aslında $\mathbb{Q} \approx \omega$, çünkü kesirli sayılar, Şekil 2'deki "Stern–Brocot ağacı" olarak, ve ondan sonra bir liste olarak, yazılabilir.

Şimdi $\mathbb{R}$, **gerçel sayılar** topluluğu olsun. Her kesirli sayı, gerçel sayı olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki farklı gerçel sayının arasında bir kesirli sayı vardır. O zaman $\mathbb{R}$ topluluğundan $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ kuvvet kümesine giden öyle bir h göndermesi vardır ki her a gerçel sayısı için

$$h(a) = \{x \in \mathbb{Q} \colon x < a\},$$

ve bu gönderme, birebirdir. Öyleyse a sayısı, $h(a)$ kümesi olarak

*Bu, Kuratowski'nin tanımıdır [12]. Daha önce, Wiener [28] daha karmaşık bir tanım verdi.

düşünülebilir, ve $\mathbb{R}$, bir kümedir. Ayrıca

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathscr{P}(\omega) \qquad \text{ve} \qquad \mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}.$$

Örneğin

$$\mathscr{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$$

çünkü ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathscr{P}(\omega)$ kümesine giden bir

$$f \mapsto \{x \in \omega \colon f(x) = 1\}$$

eşlemesi vardır, ve ayrıca ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden bir birebir

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(k)}{3^{k+1}}$$

göndermesi vardır. Sonuç olarak, **Schröder–Bernstein Teoremine** göre

$$\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega),$$

çünkü bu teoreme göre tüm a ile b kümeleri için

$$a \preccurlyeq b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Şimdi Cantor'un Teoreminden $\omega \prec \mathbb{R}$. Özel olarak öyle bir α olacak ki $\alpha > 0$ ve $\mathbb{R} \approx \aleph_\alpha$. Ama α ordinalinin 1 olup olmadığını bilmiyoruz. **Kontinü Hipotezine** (*Continuum Hypothesis*) göre $\alpha = 1$, yani $\omega \preccurlyeq a \prec \mathscr{P}(\omega)$ ise $a \approx \omega$. **Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezine** (*Generalized Continuum Hypothesis*) göre her sonsuz b kümesi için $b \preccurlyeq c \prec \mathscr{P}(b)$ ise $b \approx c$.

Seçim Aksiyomu hariç kümeler kuramının kullanacağımız aksiyomları, *Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.* Aslında Zermelo'nun verdiği aksiyomlar [29], aşağıdadır.

I. *Uzama* (sayfa 31'de).
II. **Temel Kümeler** (*Elementary Sets*): $\varnothing$, $\{a\}$, ve $\{a, b\}$ toplulukları, kümedir.
III. Ayırma (sayfa 17'de).

IV. Kuvvet Kümesi (sayfa 17'de).
V. Bileşim (sayfa 15'te).
VI. Seçim (sayfa 16'da).
VII. Sonsuzluk (sayfa 11'de).

(sayfa 10'daki Bitiştirme Aksiyomumuz, Zermelo'nun II. ve V. aksiyomları tarafından gerektirilir. Ters olarak Bitiştirme ve Boş Küme Aksiyomlarımız, Zermelo'nun II. aksiyomunu gerektirir.) Sonra iki aksiyom daha verildi:

VIII. Yerleştirme (sayfa 15'te).
IX. **Temellendirme** (*Foundation* [23]): Her boş olmayan a kümesinin öyle bir b elemanı vardır ki $a \cap b = \varnothing$ (sayfa 34'e bakın).

I–V ile VII–IX $\mathscr{N}^{\text{olu}}$ aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.**

Birkaç tane kısaltmalar kullanılır:

$$\begin{aligned}
\text{AC} &= \text{Seçim Aksiyomu},\\
\text{ZF} &= \text{Zermelo–Fraenkel Aksiyomları},\\
\text{ZFC} &= \text{Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıyla Seçim Aksiyomu},\\
\text{KH} &= \text{Kontinü Hipotezi},\\
\text{GKH} &= \text{Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi}.
\end{aligned}$$

O zaman
$$\text{ZFC} = \text{ZF} + \text{AC}.$$

Gödel'in kanıtladığı teoreme göre ZF **tutarlıysa** (yani ondan bir çelişki çıkmazsa), o zaman ZFC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca ZFC aksiyomlarıyla GKH tutarlıdır [9, 10]. Sierpiński [22],

$$\text{ZF} + \text{GKH} \Rightarrow \text{AC}$$

gerektirmesinin gösterdi.* Cohen'in [5] kanıtladığı teoreme göre ZF tutarlıysa, o zaman ZF + $\neg$AC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca

*Sierpiński'ye göre 1926 yılında Lindenbaum ve Tarski, bu gerektirmesini ilan ettiler, ama kanıtını vermediler.

ZFC + ¬KH tutarlıdır. Sierpiński'nin teoremi, aşağıdaki Teorem 122 olacaktır; Gödel'in ve Cohen'in teoremlerini kanıtlamayacağız.

2. Mantık

2.1. Formüller

Formüllerde kullanacağımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, …; x_0, x_1, x_2, …;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, …; a_0, a_1, a_2, …;*
3) **ikili bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;†
4) bir **birli bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).‡

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, özyinelidir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ, bir formül ise, o zaman

$$\neg\varphi$$

ifadesi de bir formüldür.

---

*Bilinen değerler için Latin alfabesinin başlangıcından harflerin kullanılışı, ve bilinmeyen değerler için Latin alfabesinin sonundan harflerin kullanılışı, Descartes'te [7] görünür.

†Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\to$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır. Bunları kalemle yazmak daha kolaydır. Ama bu notlarda, $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına gittiğinin anlamına gelecek. Aşağıdaki sayfa 45'e bakın.

‡Yukarıdaki sayfa 9'daki dipnota bakın.

3. Eğer φ ile ψ, iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

ifadeleri de, formüldür.
4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad \forall x\ \varphi$$

ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi \wedge \psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **gerektirme** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 1. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem gerektirme, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, gerektirme değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, gerektirmedir.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bir şekilde birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki özyineli tanımı yapabiliriz. Bir değışkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir ikili bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

2.2. Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her *serbest* geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.

2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \wedge \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.
7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a kümesi için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane kısaltma daha kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\vec{x}$ listesini oluştururlarsa, o zaman formül

$$\varphi(\vec{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \vec{x}\ \varphi(\vec{x}), \qquad\qquad \exists \vec{x}\ \varphi(\vec{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\vec{a}$, uzunluğun $\vec{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\vec{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\vec{x})$ ile $\psi(\vec{x})$, iki formül ise, ve *sadece doğruluğun tanımını kullanarak*

$$\forall \vec{x}\ \big(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \psi(\vec{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*): kısaca

$$\varphi \quad \text{denktir} \quad \psi.$$

Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\vec{a}$ sabit listesi için, *doğruluğun tanımına göre*

$$\varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \psi(\vec{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &\quad \text{denktir} \quad \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\
\varphi \Rightarrow \psi &\quad \text{denktir} \quad \neg\varphi \vee \psi, \\
\varphi \Leftrightarrow \psi &\quad \text{denktir} \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi), \\
\forall x\ \varphi &\quad \text{denktir} \quad \neg\exists x\ \neg\varphi.
\end{aligned}$$

Ama $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Rightarrow x \in y\big)$ ile $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\big)$, denk değildir.

Teorem 2.

1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 3.

1. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ *ile* $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ *denktir.*
2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman*

$$\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \textit{denktir} \quad \varphi \Rightarrow \forall x\ \psi.$$

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.

Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur.
□

2.3. Eşitlik

Yukarıdaki sayfa 14'te dediğimiz gibi

$$t = u$$

ifadesi, $\forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u)$ formülünün kısaltması olarak kullanılabilir. O zaman $=$ işareti, yeni bir yüklemdir, ve tanımına göre

$$t = u \quad \text{denktir} \quad \forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u).$$

Burada x, herhangi bir değişken olabilir, ama t ile u terimlerinden farklı olmalıdır. Örneğin $x = y$ ifadesi, $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün kısaltmasıdır, ama $\forall x\ (x \in x \Leftrightarrow x \in y)$ formülünün kısaltması değildir.

O zaman

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \Leftrightarrow \forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \tag{$*$}$$

cümlesi doğrudur. Yani tüm a ile b kümeleri için

$$a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$$

cümlesi doğrudur. Bu cümle, $\Leftrightarrow$ simgesinin tanımına göre, iki cümlenin birleşmesine denktir, ve bu cümleler,

$$a = b \Rightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b), \quad \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b.$$

O zaman tüm a ile b kümeleri için, hem

$$\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

doğrudur, hem de, Teorem 3'e göre, her c kümesi için,

$$a = b \land c \in a \Rightarrow c \in b$$

doğrudur.

Bizim için, $(*)$ cümlesinin doğruluğu, bir tanımdır. Yani, simgesi $\in$ olan **içerilme** bağıntısı, temel bir bağıntıdır, ama **eşitlik** bağıntısı, yukarıdaki $(*)$ cümlesini sağlayan bir $=$ bağıntısıdır.

Teorem 4. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = a, \qquad a = b \Rightarrow b = a, \qquad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Teoreme göre eşitlik bağıntısı, **dönüşlü** (*reflexive*), **simetrik** (*symmetric*), ve **geçişli** (*transitive*) bir bağıntıdır; kısaca bir **denklik bağıntısıdır** (*equivalence relation*).

Teoremin dolayısıyla $a = b \wedge b = c$ cümlesinin kısaltması olarak $a = b = c$ ifadesi yazılır; yani

$$a = b = c \quad \text{denktir} \quad a = b \wedge b = c.$$

İlk resmi aksiyomumuz şu:

AKSİYOM 1 (Eşitlik)**.** *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = b \wedge a \in c \Rightarrow b \in c$$

cümlesi doğrudur. Yani

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge x \in z \Rightarrow y \in z)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyomun başka biçimleri vardır, mesela:

1. Tüm a, b, ve c kümeleri için $a = b \Rightarrow a \in c \Rightarrow b \in c$.
2. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\, (a = b \Rightarrow a \in x \Rightarrow b \in x)$.
3. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\, (a = b \wedge a \in x \Rightarrow b \in x)$.
4. Tüm a ile b kümeleri için $a = b \Rightarrow \forall x\, (a \in x \Rightarrow b \in x)$.
5. $\forall x\, \forall y\, (x = y \Rightarrow \forall z\, (x \in z \Rightarrow y \in z))$.
6. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \Rightarrow x \in z \Rightarrow y \in z)$.

Alıştırma 2. $a = b \wedge \forall x\, (a \in x \Rightarrow b \in x)$ cümlesi, Eşitlik Aksiyomundan kanıtlanabilir mi?

Teorem 5. *Her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için*

$$a = b \wedge \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) \tag{†}$$

cümlesi doğrudur.

Kanıt. Formüllerin özyineli tanımı nedeni ile, *tümevarım* kullanabiliriz.

1. İlk olarak φ bölünemesin. Yani $\varphi(x)$, ya $c \in x$ veya $x \in c$ biçiminde olsun. O zaman (†) cümlesi, ya eşitliğin tanımından, ya da Eşitlik Aksiyomundan, doğrudur.

2. Eğer φ, ya ψ ya da χ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge (\psi(a) \wedge \chi(a))$ doğru olsun. O zaman hem $a = b \wedge \psi(a)$ hem $a = b \wedge \chi(a)$ doğru olmalı. Sonuç olarak varsayımımızdan hem $\psi(b)$ hem $\chi(b)$ doğru olmalı, yani $\psi(b) \wedge \chi(b)$ doğru olmalı. Öyleyse φ, $\psi \wedge \chi$ ise (†) doğrudur.

3. Son olarak, tüm c için $\varphi(x)$, $\psi(x, c)$ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge \exists y\ \varphi(a, y)$ doğru olsun. O zaman bir c için $a = b \wedge \varphi(a, c)$ doğru olmalı, dolayısıyla $\varphi(b, c)$ doğru olmalı. Sonuç olarak $\exists y\ \varphi(b, y)$ doğrudur. Öyleyse $\varphi(x)$, $\exists y\ \varphi(x, y)$ ise (†) doğrudur. □

Kitapların çoğunda hem $\in$ hem $=$, temel bağıntıdır, ve yukarıdaki sayfa 29'daki $(*)$ cümlesi, tanım değil, **Uzama Aksiyomudur*** (*Axiom of Extensionality* [29]). Bu kitaplarda her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için (†) cümlesi, bir **mantıksal aksiyomdır.**

2.4. Sınıflar

Bir $\varphi(x)$ formülü ve bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa a kümesi, $\varphi(x)$ formülünü **sağlar** (*satisfies*). O zaman φ formülünü sağlayan kümeler topluluğu vardır. Bu topluluk

$$\{x \colon \varphi(x)\}$$

*Veya **Küme Eşitliği Aksiyomu** [16].

olarak yazılır, ve ona φ **tarafından tanımlanmış sınıf** (*class defined by* φ) denir.

Yukarıdaki sayfa 23'teki tanıma göre bir değişken veya sabit, bir *terimdir.* Daha kesinlikle bir **küme terimidir** (*set term*). Şimdi, eğer x değişkeni, φ formülünün serbest bir değişkeniyse, φ formülünü

$$\varphi(\dots x \dots)$$

olarak yazarız. O zaman

$$\{x \colon \varphi(\dots x \dots)\}$$

ifadesi, bir **sınıf terimi** (*class term*) olacak. Sınıf terimlerini formüllerde kullanabiliriz, ama şimdilik, sadece $\in$ işaretinin sağında. Bir x değişkeninin bir $\varphi(\dots y \dots)$ formülündeki serbest geçişi, bir

$$t \in \{y \colon \varphi(\dots y \dots)\}$$

formülünde (hâlâ) serbesttir. Eğer x değişkeninin $\varphi(\dots x \dots)$ formülünündeki her serbest geçişinin yerine a sabitini koyarsak $\varphi(\dots a \dots)$ formülü çıkar. Şimdi tanıma göre

$$a \in \{x \colon \varphi(\dots x \dots)\} \quad \text{denktir} \quad \varphi(\dots a \dots).$$

Bir sabit veya bir $\{x \colon \varphi(x)\}$ sınıf terimi, **kapalı** (*closed*) bir terimdir. Kapalı bir terim, bir kümenin veya bir sınıfın adıdır. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ gibi büyük siyah harfleri kapalı sınıf terimleri olarak kullanacağız. O zaman sayfa 29'daki tanıma göre

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad &\text{denktir} \quad \forall x \, (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}), \\ a = \boldsymbol{B} \quad &\text{denktir} \quad \forall x \, (x \in a \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}), \\ \boldsymbol{B} = a \quad &\text{denktir} \quad a = \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$a = \{x \colon x \in a\}.$$

Yani her küme, bir sınıfa eşittır. Ama tersi yanlıştır; bildiğimiz gibi bazı sınıflar hiçbir kümeye eşit değildir:

Teorem 6 (Russell Paradoksu [21])**.** *$\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, hiçbir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. Bu teoremi zaten sayfa 13'te kanıtladık. Şimdi bir kanıt daha vereceğiz. $x \notin x$ formülü tarafından tanımlanmış sınıf, $\boldsymbol{A}$ olsun. O zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow b \notin b$$

doğrudur. O zaman $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in b)$ cümlesi yanlıştır. Eşitliğin tanımına göre $b \neq \boldsymbol{A}$. □

Şimdi sınıf terimlerini $\in$ işaretinin solunda kullanabiliriz, ama çıkan cümle doğru olacağı için sınıf terimi bir kümeyi adlandırmalı:

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{B} \quad \text{denktir} \quad \exists x\ (x = \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}).$$

Eğer $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$ doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfının **altsınıfıdır** (*subclass*), ve $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ifadesini yazarız. Yani

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \quad \text{denktir} \quad \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Teorem 7.

1. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad \textit{denktir} \quad \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

2. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$$

   cümlesi (mantığa göre) doğrudur.

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayın.

2.5. İşlemler

Sınıflarla birkaç tane ikili işlem vardır. Önce

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}\},$$
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}\}.$$

Bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **kesişimi** (*intersection*) ve **bileşimi** (*union*).

Teorem 8. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C},$$
$$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C},$$
$$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}),$$
$$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}).$$

Kanıt. $x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B} \quad \text{denktir} \quad x \in \boldsymbol{B} \wedge x \in \boldsymbol{A}$, vesaire. □

Ondan sonra

$$\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} = \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının $\boldsymbol{B}$ sınıfından **farkıdır** (*difference*). O zaman

$$\boldsymbol{A} \vartriangle \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{A}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A});$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **simetrik farkıdır** (*symmetric difference*).

Teorem 7 sayesinde bir $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$ cümlesinin yerine

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$$

ifadesini yazabiliriz. Örneğin sonraki teoremi yazabiliriz.

Teorem 9. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 4. Teoremi kanıtlayın.

Sınıflarda bir *birli* işlem vardır:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} = \{x \colon x \notin \boldsymbol{A}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının **tümleyenidir** (*complement*).

Teorem 10 (De Morgan Kuralları*). *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cup \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}, \qquad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cap \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}.$$

Alıştırma 5. Teoremi kanıtlayın.

İçerilme bağıntısını kullanarak birkaç tane birli işlemi daha tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \bigcap \boldsymbol{A} &= \{x \colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\}, \\ \bigcup \boldsymbol{A} &= \{x \colon \exists y\ (x \in y \land y \in \boldsymbol{A})\}, \\ \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) &= \{x \colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})\} \\ &= \{x \colon x \subseteq \boldsymbol{A}\}; \end{aligned}$$

bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ sınıfının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **kuvvet sınıfıdır** (*power class*).

Teorem 11. *Eğer $a \in \boldsymbol{B}$ ise*

$$\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın.

---

*Aslında bu kuralları, Augustus De Morgan'ın (1806–71) eserlerinde bulamadım, ama Venedikli Paulus'un (∼1369–1429) eserlerinde [1, 31.35] buldum.

Son olarak sayfa 14'teki gibi

$$\mathbf{V} = \{x\colon x = x\},$$

ve

$$\begin{aligned} \varnothing &= \{x\colon x \neq x\}, \\ \{a\} &= \{x\colon x = a\}, \\ \{a,b\} &= \{x\colon x = a \lor x = b\}, \\ \{a,b,c\} &= \{x\colon x = a \lor x = b \lor x = c\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Buradaki $\varnothing$ sınıfı, **boş sınıftır.**

Teorem 12.

$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}, \qquad \bigcup \varnothing = \varnothing.$$

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın.*

Bu altbölümün

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}}, & & \varnothing, \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, & \bigcap \boldsymbol{A}, & \mathbf{V}, & \{a\}, \\ \boldsymbol{A} \mathbin{\triangle} \boldsymbol{B}, & \bigcup \boldsymbol{A}, & & \{a,b\}, \\ \boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}, & \mathscr{P}(\boldsymbol{A}), & & \{a,b,c\} \end{array}$$

ifadeleri, *sınıf* terimidir. Her $\boldsymbol{A}$ veya $\boldsymbol{B}$ teriminin yerine başka bir terimi koyabiliriz. Zaten bu şekilde $(\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ gibi ifadeleri yazdık. Fakat şimdilik küçük harfler hariç, küme terimlerimiz yoktur. Bu durum hemen değişecek.

---

*Bazı kitaplarda $\boldsymbol{A}$ boş ise $\bigcap \boldsymbol{A}$ kesişimi tanımlanmaz. Örneğin [16, s. 51 & 285] kaynağına bakın.

3. Doğal Sayılar

3.1. Doğal sayılar kümesi

Doğruluğun sayfa 25'teki tanımına göre $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru mudur? Yani $\exists x\ \forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi doğru mudur? Eğer bir b kümesi için $b = a$ cümlesi, yani $\forall y\ (y \in b \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi, doğruysa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi de doğrudur. Aslında Teorem 4'e göre $a = a$ cümlesi doğru, değil mi? O halde $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru olmalı.

Ama bu iddia pek doğru değildir. Bir a kümesi varsa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi doğrudur. Bir küme varsa, bu kümeye a denilebilir, ve sonuç olarak $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru oluyor. Bu ana kadar hiç kesin bir kümemiz olmadı. Ama kümeler olmalı, ve birini zaten biliyoruz:

AKSİYOM 2 (Boş Küme). *$\varnothing$ boş sınıf, bir kümedir:*

$$\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde $\varnothing$ işareti, bir küme terimidir. Bu yüzden $\{\varnothing\}$ ve $\{\varnothing, a\}$ gibi sınıf terimlerini yazabiliriz. Bu terimler de, küme terimi olacak. Boş küme gibi bilinen kümelerden yeni kümeler oluşturulabilir:

AKSİYOM 3 (Bitiştirme). *Tüm a ile b kümeleri için $a \cup \{b\}$ sınıfı, bir kümedir:*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w \in x \lor w = y)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 13 (Temel Kümeler)**.** *Tüm a ile b kümeleri için $\{a\}$ ile $\{a, b\}$ sınıfları, kümedir:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z = x),$$
$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

cümleleri doğrudur.

Kanıt. Boş Küme ile Bitiştirme Aksiyomlarına göre $\{a\}$ sınıfı, $\varnothing \cup \{a\}$ kümesine eşittir, ve $\{a, b\}$ sınıfı, $\{a\} \cup \{b\}$ kümesine eşittir. □

Özel olarak her a kümesi için $a \cup \{a\}$ bir kümedir. Bu son küme, a' olsun. Yani her a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\}$$

olsun. a' kümesi, a kümesinin **ardılıdır** (*successor*). Sık sık ardılları alarak

$$\varnothing, \qquad \varnothing', \qquad \varnothing'', \qquad \varnothing''', \qquad \dots$$

küme dizisini oluşturabiliriz. Bu dizi,

$$\varnothing, \qquad \{\varnothing\}, \qquad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}, \qquad \dots$$

Yukarıdaki sayfa 11'deki gibi bu kümeler,

$$0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad \dots$$

doğal sayıları olacak. Elemanları *tüm* doğal sayılar olan bir sınıf var mıdır?

Doğal sayıların *topluluğunun* iki özelliği vardır:

1. 0, bu topluluktadır.
2. Eğer a, bu topluluktaysa, $a \cup \{a\}$ kümesi de, bu topluluktadır.

Bu özellikleri olan *kümeler,* bir sınıf oluşturur. Yani

$$\mathbf{\Omega} = \{x \colon 0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{\Omega}$ sınıfı vardır.

Teorem 14.

1. $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
2. *Eğer* $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, o zaman* $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
3. *Eğer* $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, ve* a*,*

$$0 \in a, \qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$.

Kanıt. 1. Eğer $a \in \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman $0 \in a$. Sonuç olarak $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

2. $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ olsun. O zaman $\mathbf{\Omega}$ sınıfının her b elemanı için $a \in b$. Ayrıca $b \in \mathbf{\Omega}$ yüzünden $\forall y\ (y \in b \Rightarrow y \cup \{y\} \in b)$ cümlesi doğrudur. O zaman $a \cup \{a\} \in b$ olmalı. Sonuç olarak $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

3. $0 \in a$ ve $\forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$ doğru olsun. O zaman $a \in \mathbf{\Omega}$. Bu yüzden Teorem 11'e göre $\bigcap \mathbf{\Omega} \subseteq a$ olmalı. Eğer ayrıca $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman Teorem 7'ye göre $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$. □

Bu teoreme rağmen eğer

$$\boldsymbol{A} \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}, \qquad 0 \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \boldsymbol{A}) \qquad (*)$$

ise $\boldsymbol{A} = \bigcap \mathbf{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Çünkü Teorem 12'ye göre

$$\bigcap 0 = \mathbf{V}$$

(yani $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$), ve $\mathbf{\Omega}$ sınıfının boş olmadığını şimdilik bilmiyoruz. Bu durumu hemen değiştirebiliriz:

AKSİYOM 4 (Sonsuzluk)**.** $\mathbf{\Omega} \neq 0$, *yani*

$$\exists x\ \big(0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Hâlâ yukarıdaki $(*)$ satırındaki varsayılardan $\boldsymbol{A} = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Bir tane aksiyomu daha kullanarak bunu sonuçlandırabiliriz:

AKSİYOM 5 (Ayırma)**.** *Bir kümenin her altsınıfı, bir kümedir, yani her $\varphi(x)$ formülü için*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x \land \varphi(z)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Şimdi her a kümesi ve $\varphi(x)$ formülü için $\{x\colon x \in a \land \varphi(x)\}$ sınıfı, bir kümedir, ve bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır.

Teorem 15. *Bir sınıf boş değilse, kesişimi bir kümedir.*

Kanıt. $a \in \boldsymbol{B}$ olsun. Teorem 11'e göre $\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a$. Ayırma Aksiyomuna göre $\bigcap \boldsymbol{B}$ kesişimi, bir küme olmalı. □

Özel olarak

$$\omega = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$$

eşitliğini sağlayan bir ω kümesi vardır. Bu kümenin elemanları, **von Neumann doğal sayılarıdır.** ω işareti, yeni bir küme terimidir. Bundan sonra $\boldsymbol{\Omega}$ sınıf terimini kullanmayacağız.

Şimdi Teorem 14'ü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

1. $0 \in \omega$.
2. Eğer $a \in \omega$ ise, o zaman $a' \in \omega$.
3. Eğer $a \subseteq \omega$ ise, ve a,

$$0 \in a, \qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x' \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \omega$.

Ayrıca her kümeninki gibi ω kümesinin de her altsınıfı, bir kümedir. Sonuç olarak ω kümesinin bazı özelliklerini **tümevarım** (*induction*) yöntemiyle kanıtlayabileceğiz.

Aslında bazen ω kümesinin iki özelliğinin daha kullanılması gerekecek. $\forall x\ x' \neq 0$ apaçıktır. Ama k ile m, doğal sayılar ise, ve $k' = m'$ ise, $k = m$ eşitliğini elde etmek, biraz daha zor olacak.

Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. O zaman $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. Bundan $k \in k$ cümlesini sonuçlandırmak istiyoruz.

Eğer bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı,

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \land y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})$$

cümlesini sağlarsa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **geçişli** (*transitive*) denir. Öyleyse her geçişli sınıfın her elemanı, sınıfın bir altkümesidir de.

Teorem 16. *ω kümesinin her elemanı, geçişlidir.*

Kanıt. a, ω kümesinin geçişli elemanları kümesi olsun. Yani

$$\begin{aligned} a &= \{x \in \omega \colon \forall y\ \forall z\ (y \in x \land z \in y \Rightarrow z \in x)\} \\ &= \{x \in \omega \colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)\} \end{aligned}$$

olsun. O zaman $0 \in a$. *Tümevarım hipotezi* olarak $b \in a$ olsun. $b' \in a$ cümlesinin doğruluğunu göstereceğiz. $c \in b'$ olsun. Ya $c \in b$ ya da $c = b$. Eğer $c \in b$ ise, o zaman hipotezimize göre $c \subseteq b$. Her durumda $b \subseteq b'$. Öyleyse $c \subseteq b'$. Ama c, b' kümesinin herhangi bir elemanıdır. Sonuç olarak $b' \in a$. Tümevarımdan (yani Teorem 14'ün sayfa 40'taki biçiminden) $a = \omega$. □

Teorem 17. *ω kümesi, geçişlidir.*

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 9. $\{0, 1, \{1\}\}$ kümesinin geçişli olduğunu kanıtlayın.

Teorem 18. *ω kümesinin hiçbir elemanı, kendisini içermez.*

Kanıt. Tekrar tümevarımı kullanacağız. Çünkü boş kümenin hiçbir elemanı yok, $0 \notin 0$. Şimdi $a \in \omega$ ve $a \notin a$ olsun. Eğer $a' \in a'$ ise, ya $a' \in a$ ya da $a' = a$. Her durumda, geçen teoreme göre, $a' \subseteq a$, dolayısıyla $a \in a$ (çünkü $a \in a'$). Bu sonuç, varsayımımızla çelişir. O zaman $a' \notin a'$ olmalı. Tümevarımdan kanıtımız bitti. □

Teorem 19. *ω kümesinin tüm k ile m elemanları için $k' = m'$ ise $k = m$.*

Kanıt. Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. Dediğimiz gibi $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. Teorem 16 ve 18'e göre $k \in k$ ve $k \notin k$, bir çelişkidir. □

Şimdi, Teorem 14'tekiler dahil, ω kümesinin beş tane özelliği vardır:

1. $0 \in \omega$.
2. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \in \omega)$.
3. $\forall x\ \big(x \subseteq \omega \land 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x) \Rightarrow x = \omega\big)$.
4. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \neq 0)$.
5. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x' = y' \Rightarrow x = y)$.

Bu özelliklerin önemi, 1887 yılında Dedekind [6, II, ¶71] tarafından, ve 1889 yılında Peano [18] tarafından, fark edilmiştir. Sık sık **Peano Aksiyomları,** bu özelliklere denir, ama **Dedekind–Peano Aksiyomları** de kullanılabilir. Aslında bizim için aksiyomlar değil, teoremdirler.

Peano Aksiyomlarından doğal sayıların tüm özellikleri elde edilebilir. Mesela *iyisıralama* özelliği elde edilebilir. Aslında ω, içerilme ($\in$) bağıntısı tarafından iyisıralanır. Ama bir bağıntı nedir?

3.2. Bağıntılar

Herhangi a ile b kümeleri için $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$ kümesi (a,b) **sıralı ikilisi** (*ordered pair*) olarak yazılır. Yani*

$$(a,b)=\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}.$$

Teorem 20. *Tüm a, b, c, ve d kümeleri için*

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

cümlesi doğrudur.

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 11. Aşağıdaki denkliğini† kanıtlayın:

$$\big\{\{a,1\},\{b,2\}\big\}=\big\{\{c,1\},\{d,2\}\big\}\Leftrightarrow a=c\wedge b=d.$$

Alıştırma 12. Aşağıdaki denkliğini‡ kanıtlayın:

$$\Big\{\big\{\{a\},0\big\},\big\{\{b\}\big\}\Big\}=\Big\{\big\{\{c\},0\big\},\big\{\{d\}\big\}\Big\}\Leftrightarrow a=c\wedge b=d.$$

Şimdi her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için

$$\big\{z\colon \exists x\ \exists y\ \big(z=(x,y)\wedge\varphi(x,y)\big)\big\}$$

sınıfı,

$$\{(x,y)\colon \varphi(x,y)\}$$

olarak yazılabilir. Öyle bir sınıf, bir **ikili bağıntıdır** (*binary relation*). Örneğin:

---

*sayfa 19'daki notta dediğimiz gibi bu tanım, Kuratowski'nin [12] 1921 yılında verdiği tanımdır.

†Heijenoort'a [26, s. 224] göre bu denklikte, Hausdorff'un 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanım bulunmuştur.

‡Bu denklikte, Wiener'in [28] 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanım bulunmuştur.

1. İçerilme bağıntısı, $\{(x, y) \colon x \in y\}$ sınıfıdır.
2. Eşitlik bağıntısı, $\{(x, y) \colon x = y\}$ sınıfıdır.

Aynı şekilde, eğer $\boldsymbol{R}$, bir ikili bağıntıysa, o zaman $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ formülünün kısaltması olarak $x \mathrel{\boldsymbol{R}} y$ ifadesini yazarız, yani

$$x \mathrel{\boldsymbol{R}} y \quad \text{denktir} \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}.$$

$\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, iki sınıf ise, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) \colon x \in \boldsymbol{A} \land y \in \boldsymbol{B}\};$$

bu bağıntı, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **çarpımıdır** (*product*). Eğer $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, o zaman $\boldsymbol{R}$, **$\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden** bir bağıntıdır (*relation from $\boldsymbol{A}$ to $\boldsymbol{B}$*).

Sınıflar arasındaki bir bağıntının kendisi, bir sınıftır. Sıralı ikililerin tanımı, sınıflarla bağıntıları birleştirir. Benzer şekilde Newton'un Ağırlık Kanunu, Ay'ın Yer'in etrafında dönüşü ile nesnelerin Yer'e düşüşünü birleştirir.

Eğer $\boldsymbol{F}$,

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \mathrel{\boldsymbol{F}} y \land x \mathrel{\boldsymbol{F}} z \Rightarrow y = z) \tag{†}$$

cümlesini sağlayan bir ikili bağıntıysa, o zaman

(1) $\boldsymbol{F}$ bağıntısına **gönderme** veya **fonksiyon** denir;
(2) $\{x \colon \exists y\; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **tanım sınıfı** (*domain*) denir;
(3) $\{y \colon \exists x\; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **değer sınıfı** (*range*) denir.*

---

*Bu notlarda bir gönderme, sadece (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısıdır. Fakat bazı kaynaklarda (örneğin [16, s. 70] kaynağında) bir gönderme veya fonksiyon, (1) (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısı, (2) $\{y \colon \exists x\; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına eşit bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı, ve (3) $\{y \colon \exists x\; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfını *kapsayan* bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından oluşturulmuş bir üçlüdür. O halde (aşağıdaki sayfa 45'teki gibi) $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi yazılır. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$ sınıfına *göndermenin değer sınıfı* (veya *varış sınıfı*) denilebilir. İngilizcede *codomain* kullanılır. Ama buradaki $\boldsymbol{B}$ sınıfı, sadece $\boldsymbol{F}$ sınıfı tarafından belirtilmez, ve buna hiçbir ad vermiyoruz.

Bu durumda $x\ \boldsymbol{F}\ y$ formülünün yerine

$$y = \boldsymbol{F}(x)$$

ifadesini yazarız, çünkü $a\ \boldsymbol{F}\ b$ doğruysa, o zaman b kümesi, a kümesi tarafından belirtilir. Buradaki $\boldsymbol{F}(x)$ ifadesi, yeni bir küme terimidir. O zaman $\boldsymbol{F}$,

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

olarak yazılabilir; yani

$$(x \mapsto \boldsymbol{F}(x)) = \{(x, y) \colon y = \boldsymbol{F}(x)\}.$$

Örneğin:

1. Her a kümesi için $x \mapsto a$ göndermesi, **sabit göndermedir** (*constant function*). Mesela $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, …, $x \mapsto \omega$, … sabit göndermeleri vardır.
2. $x \mapsto x$, **özdeşlik göndermesidir** (*identity function*).
3. $x \mapsto x'$, **ardıl göndermesidir** (*successor function*) veya **ardıllamadır** (*succession*).

Eğer $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı $\boldsymbol{A}$ ise, ve değer sınıfını, bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından kapsanırsa, o zaman

$$\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Yani bu ifade,

$$\begin{aligned}\forall x\ \forall y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \Rightarrow x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B})&\\ \wedge \forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \exists y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y)\big)&\\ \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \wedge x\ \boldsymbol{F}\ z \Rightarrow y = z)&\end{aligned}$$

cümlesinin kısaltmasıdır.

3.3. Sıralamalar

Sıralama (*ordering*),

$$\forall x \neg x \boldsymbol{R} x, \qquad \forall x \forall y \forall z (x \boldsymbol{R} y \wedge y \boldsymbol{R} z \Rightarrow x \boldsymbol{R} z)$$

cümlelerini sağlayan bir $\boldsymbol{R}$ ikili bağıntısıdır. Örneğin sayfa 20'de bahsedilen ve sayfa 106'da kanıtlanan Schröder–Bernstein Teoremine göre $\prec$ bağıntısı, bir sıralama olacaktır. Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \quad \text{denktir} \quad \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

olsun; o zaman $\subset$ bağıntısı da, bir sıralamadır.

Belki bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısı, bir sıralama değildir, ama bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\boldsymbol{R} \cap (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})$$

kesişimi, bir sıralama olabilir. O zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanır. Örneğin $\in$, sıralama değil; ama Teorem 16 ve 18'e göre $\in$ bağıntısı ω kümesini sıralar.

Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfı, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanırsa, ve üstelik

$$\forall x \forall y (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge x \neq y \Rightarrow x \boldsymbol{R} y \vee y \boldsymbol{R} x)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir **doğrusal** (*linear*) sıralamasıdır.

Teorem 21. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının doğrusal sıralamasıdır.*

Alıştırma 13. Teoremi kanıtlayın.

Eğer

1) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının doğrusal sıralamasıysa,
2) $\boldsymbol{A}$ sınıfının her boş olmayan b altkümesinin $\boldsymbol{R}$ sıralamasına göre **en küçük elemanı** (*least element*) veya **minimumu** (*minimum*)* varsa, yani

$$\forall x \Big(x \subseteq \boldsymbol{A} \wedge x \neq 0 \Rightarrow \exists y \big(y \in x \wedge \forall z (z \in x \smallsetminus \{y\} \Rightarrow y \boldsymbol{R} z)\big)\Big)$$

*Latincede "küçük" *parvus, -a, -um*; "daha küçük" *minor, -us*; "en küçük" *minimus, -a, -um* [17, Lectio 12, s. 114].

doğruysa, ve

3) $\boldsymbol{A}$ sınıfının her b elemanı için $\{x\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \mathrel{\boldsymbol{R}} b\}$ sınıfı bir küme ise,

o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından **iyisıralanır** (*well-ordered*). $\boldsymbol{A}$ zaten bir küme ise, koşul 3 doğrudan doğruya sağlanır; ama bu koşul, Teorem 28'de kullanılacaktır.

Teorem 22. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının iyisıralamasıdır.*

Alıştırma 14. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 23. *ω kümesinde $\in$ ile $\subset$, aynı bağıntıdır, yani*

$$\forall x\,\forall y\,\bigl(x \in \omega \wedge y \in \omega \Rightarrow (x \in y \Leftrightarrow x \subset y)\bigr)$$

doğrudur.

Kanıt. k ile m, doğal sayılar olsun. Teorem 16 ve 18'e göre $k \in m$ ise $k \subset m$.

Şimdi $k \subset m$ olsun. Önceki teoreme göre $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. O zaman $\ell \in m$, dolayısıyla $\ell \subseteq m$. Ayrıca $a \in \ell$ ise $a \in k$ olmalı (çünkü $a \in m$, ama içerilmeye göre ℓ, $m \smallsetminus k$ farkının en küçük elemanıdır). Öyleyse $\ell \subseteq k$. Ama $b \in k$ ise $b \in m$, dolayısıyla $\ell \in b$ veya $\ell = b$ veya $b \in \ell$. Ancak $\ell \notin b$ ve $\ell \neq b$ (çünkü $b \subseteq k$ ve $\ell \notin k$). Öyleyse $b \in \ell$. Sonuç olarak $k \subseteq \ell$. Fakat $\ell \subseteq k$. O zaman $k = \ell$, dolayısıyla $k \in m$. □

Teorem 24. *ω, içerilme tarafından iyisıralanır.*

Kanıt. ω kümesinde $m \notin k$ ve $m \neq k$ olsun. Yani (önceki teoremi kullanarak) $m \nsubseteq k$ olsun. O zaman $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. Geçen kanıttaki gibi $\ell \subseteq k$, yani $\ell \in k$ veya $\ell = k$. Fakat $\ell \notin k$. Sonuç olarak $\ell = k$, dolayısıyla $k \in m$. Öyleyse içerilme, ω kümesinin bir doğrusal sıralamasıdır.

Ayrıca $a \subseteq \omega$ ve $n \in a$ ise, ya n kümesi a kümesinin en küçük elemanıdır, ya da $n \cap a$ kesişimi boş değildir. Son durumda bu kesişimin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, a kümesinin en küçük elemanıdır. □

3.4. Ordinaller

Önceki iki teoremin kanıtları, doğal sayıların sadece geçişlilik ve iyisıralama özelliklerini kullanmaktadır. Bir **ordinal,**

1) geçişli ve
2) $\in$ tarafından iyisıralanmış

bir kümedir. Ordinaller,

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluşturur. O zaman Teorem 16 ve 22'ye göre

$$\omega \subseteq \mathbf{ON}.$$

Üstelik Teorem 17 ve 24'e göre

$$\omega \in \mathbf{ON}.$$

Dolayısıyla $\omega' \subseteq \mathbf{ON}$.

Teorem 25. *Her ordinalin ardılı, bir ordinaldir.*

Alıştırma 15. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 26. ON *sınıfında $\in$ ve $\subset$, aynı bağıntıdır.*

Alıştırma 16. Teorem 23'ün kanıtını kullanarak bu teoremi kanıtlayın.

Teorem 27. ON *geçişlidir.*

Kanıt. α bir ordinal olsun, ve $\beta \in \alpha$ olsun. O zaman $\beta \subseteq \alpha$. Bu durumda β, $\in$ tarafından iyisıralanır. Şimdi $\gamma \in \beta$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, dolayısıyla $\gamma \subseteq \alpha$. O zaman $\delta \in \gamma$ ise $\delta \in \alpha$. α, $\in$ tarafından iyisıralandığından, $\delta \in \beta$, çünkü β, γ, ve δ, hepsi α kümesindedir, ve $\delta \in \gamma$, ve $\gamma \in \beta$. Kısaca $\delta \in \gamma \Rightarrow \delta \in \beta$, yani $\gamma \subseteq \beta$. Ama γ, β kümesinin herhangi bir elemanıdır. Öyleyse β, geçişlidir. Sonuç olarak β, bir ordinaldir. Ama β, α ordinalinin herhangi bir elemanıdır. O zaman $\alpha \subseteq \mathbf{ON}$. Ve α, herhangi bir ordinaldir. Öyleyse **ON** geçişlidir. $\square$

Teorem 28. **ON** *sınıfı,* $\in$ *tarafından iyisıralanır.*

Alıştırma 17. Teoremi kanıtlayın. (Teorem 24'e bakın.)

Teorem 29 (Burali-Forti Paradoksu [3])**.** **ON** *sınıfı, küme değildir.*

Kanıt. sayfa 15'te dediğimiz gibi **ON** bir küme olsaydı, Teorem 27 ve 28'e göre $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$, ki bu saçmadır (çünkü **ON** sınıfında $\in$ dönüşsüzdür). □

ON sınıfının bir a altümesinin en küçük elemanı

$$\min a$$

olarak yazılabilir. Şu andan itibaren

$$\alpha, \qquad \beta, \qquad \gamma, \qquad \delta, \qquad \theta, \qquad \iota$$

küçük Yunan harfleri, her zaman *ordinal* sabiti olacaktır. Yani

$$\alpha \in \mathbf{ON},$$

vesaire. Ayrıca Teorem 26 sayesinde $\alpha \in \beta$ veya $\alpha \subset \beta$ formülünün yerine

$$\alpha < \beta$$

ifadesini yazabiliriz, ve $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ veya $\alpha \subseteq \beta$ formülünün yerine

$$\alpha \leqslant \beta$$

ifadesini yazabiliriz. Ayrıca

$$\xi, \qquad \eta, \qquad \zeta$$

Yunan harfleri, ordinal değişkeni olacaktır. Örneğin

$$\{\xi\colon \varphi(\xi)\} = \{x\colon x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Teorem 30. *$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha' \leqslant \beta$, dolayısıyla*

$$\alpha' = \min\{\xi \colon \alpha < \xi\},$$

yani her ordinal için daha büyük ordinaller sınıfının en küçük elemanı, ordinalin ardılıdır.

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayın.

Son teoreme göre, eğer α boş veya ardıl değilse, ve $\beta \in \alpha$ ise, o zaman $\beta' < \alpha$ olmalıdır. Bu durumda, α ordinaline **limit** denir.

Teorem 31. *ω, bir limittir. Aslında en küçük limittir.*

Alıştırma 19. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 32. *$\min(\mathbf{ON} \smallsetminus \alpha) = \alpha$.*

Alıştırma 20. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 33. *ω, hem limit olmayan hem limit içermeyen ordinaller sınıfıdır. Yani*

$$\omega = \{\xi \colon (\xi = 0 \vee \exists y\ y' = \xi) \wedge \forall z\ (z \in \xi \Rightarrow z = 0 \vee \exists y\ y' = z)\}. \quad (\ddagger)$$

Kanıt. Verilen sınıf, $\boldsymbol{A}$ olsun. Tümevarımla (veya Teorem 31 ile) her doğal sayı, ne limittir ne limit içerir. Böylece $\omega \subseteq \boldsymbol{A}$. Öte yandan, $\alpha \in \boldsymbol{A} \smallsetminus \omega$ ise, o zaman son teoreme göre $\omega \leqslant \alpha$, dolayısıyla α ya bir limittir ya da bir limit içerir, ve sonuç olarak $\alpha \notin \boldsymbol{A}$. Kısaca $\boldsymbol{A} \subseteq \omega$, ve sonuç olarak $\boldsymbol{A} = \omega$. □

Bu teoremin kanıtı, Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmaz, dolayısıyla ($\ddagger$) eşitliği, ω sınıfının tanımı olarak kullanılabilir. O halde sayfa 42'deki Peano Aksiyomları yeniden kanıtlanmalıdır.

3.5. Özyineleme

ω kümesinde toplama, bir **ikili işlem** olacak, yani $\omega \times \omega$ çarpımından ω kümesine giden bir gönderme. Bu işlem,

$$(x, y) \mapsto x + y$$

olarak yazılır. O zaman her k doğal sayısı için bir $x \mapsto k + x$ **birli işlemi** olacaktır. Bu işlemin özelliklerinden ikisi,

$$k + 0 = k, \qquad \forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow k + x' = (k + x)'\big) \qquad (\S)$$

olacaktır. Aslında ω kümesindeki birli işlemlerden en çok birinin bu özellikleri vardır. Çünkü $f\colon \omega \to \omega$, $f(0) = k$, ve $\forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow f(x') = f(x)'\big)$ olsun. O zaman $f(0) = k + 0$, ve $f(m) = k + m$ ise $f(m') = f(m)' = (k + m)' = k + m'$. Tümevarımla her n doğal sayısı için $f(n) = k + n$.

Neden ω kümesindeki birli işlemlerden *en az* birinin (§) satırındaki özellikleri vardır? $k = 0$ durumunda her n için $k + n = n$ olsun. O zaman $k + 0 = 0$, ve $k + m' = m' = (k + m)'$. Üstelik $k = \ell$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi varsa $\ell' + n = (\ell + n)'$ olsun. O zaman $\ell' + 0 = (\ell + 0)' = \ell'$, ve $\ell' + m' = (\ell + m')' = (\ell + m)'' = (\ell' + m)'$. Yani $k = \ell'$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi vardır.

Tümevarımla ω kümesindeki her k için (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işleminin olduğu sonucuna varabilir miyiz? Tümevarımla bir *kümenin* ω kümesine eşit olduğu kanıtlanabilir. Şimdiki durumda hangi küme, ω kümesine eşit olmalıdır? Mümkünse a, ω kümesinin öyle k elemanları tarafından oluşturulsun ki (§) satırındaki özelliklerini sağlayan bir işlem olsun. O halde gösterdiğimiz gibi $a = \omega$ olmalıdır. Ama öyle bir a kümesi var mıdır? Hangi formül, bu kümeyi tanımlayabilir?

Sayfa 15 ve sayfa 62'deki Yerleştirme Aksiyomuna göre bir kümede birli bir işlemin kendisi, bir kümedir. O halde istediğimiz a

kümesi tanımlanabilir, dolayısıyla ω kümesindeki toplamanın kendisi tanımlanabilir. Aslında (§) satırındaki özellikleri, toplamanın **özyineli tanımını** (*recursive definition*) sağlar.

Benzer şekilde her k doğal sayısı için

$$k \cdot 0 = 0, \qquad \forall x\,(x \in \omega \Rightarrow k \cdot x' = k \cdot x + k) \tag{¶}$$

özellikleri olan $x \mapsto k \cdot x$ işlemi vardır. (Burada tabii ki $k \cdot x + k = (k \cdot x) + k$.) Çünkü $0 \cdot n = 0$ ise $0 \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot m' = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot m + 0$. Ayrıca istediğimiz gibi $x \mapsto \ell \cdot x$ varsa $\ell' \cdot n = \ell \cdot n + n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\ell' \cdot m' &= \ell \cdot m' + m' \\
&= (\ell \cdot m + \ell) + m' \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m') \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell') \\
&= (\ell \cdot m + m) + \ell' \\
&= \ell' \cdot m + \ell'.
\end{aligned}$$

Ama burada toplamanın birleşme ve değişme özelliklerini kullandık; bunlar kanıtlanmalıdır.

Buraya kadar gelmek için tümevarım yeter. Yani sayfa 42'deki ilk üç Peano Aksiyomu yeter. Sayılar teorisinde, her pozitif n modülüse göre tamsayılar, bu aksiyomları sağlar. Yani eğer bir a kümesinin elemanları tamsayı ise, ve

$$x \equiv 0 \pmod{n}$$

denkliğinin a kümesinden çözümü varsa, ve ayrıca her ℓ tamsayısı için

$$x \equiv \ell \Rightarrow y \equiv \ell' \pmod{n}$$

karaştırmasının a kümesinden çözümü varsa, o zaman her k tamsayısı için
$$x \equiv k \pmod{n}$$
denkliğinin a kümesinden çözümü vardır. Örneğin p, bir asal sayı olsun. O zaman
$$0^p \equiv 0 \pmod{p},$$
ve
$$a^p \equiv a \Rightarrow (a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p},$$
çünkü
$$\begin{aligned}(a+1)^p &\equiv a^p + pa^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-2}a^2 + pa + 1\\ &\equiv a^p + 1 \pmod{p}.\end{aligned}$$
Sonuç olarak Fermat'nın Teoremi doğrudur, yani her p asal sayısı için, her a tamsayısı için*
$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$
Aynı sebeple tüm a, b, c, ve d tamsayıları için, her pozitif n sayısı için
$$a \equiv b \wedge c \equiv d \Rightarrow a + c \equiv b + d \wedge a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}.$$

Sadece tümevarımı kullanarak $(x, y) \mapsto x^y$ ikili üstel işlemi tanımlanabilir mi? Özyineli tanım varsa ω kümesindeki her k için
$$k^0 = 1, \qquad \forall x\,(x \in \omega \Rightarrow k^{x'} = k^x \cdot k). \tag{||}$$
Özel olarak $0^0 = 1$, ama $n > 0$ ise $0^n = 0$. Öyleyse $0 \equiv n$ ama $0^0 \not\equiv 0^n \pmod{n}$. Üstel işlem için tümevarım yetmez.†

*Gauss'a [8, ¶50] göre verdiğimiz kanıt, Euler'indir.

†[19] makalesine bakın.

Teorem 34 (Özyineleme [*Recursion*]). *$\boldsymbol{A}$, bir sınıf olsun, ve $b \in \boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden*

$$\boldsymbol{G}(0) = b, \qquad \forall x \,\Big(x \in \omega \Rightarrow \boldsymbol{G}(x') = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{G}(x)\big)\Big)$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır.

Kanıt. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır. En az biri varsa, bağıntı olarak, $\omega \times \boldsymbol{A}$ çarpımının altsınıfıdır, ve her (ℓ, d) elemanı için,

- ya $(\ell, d) = (0, b)$,
- ya da bir (k, c) elemanı için, $k' = \ell$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$.

Bu özelliği olan *kümeler* vardır, mesela

$$\begin{gathered}\{(0,b)\},\\ \big\{(0,b), \big(1, \boldsymbol{F}(b)\big)\big\},\\ \Big\{(0,b), \big(1, \boldsymbol{F}(b)\big), \Big(2, \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}(b)\big)\Big)\Big\},\\ \Bigg\{(0,b), \big(1, \boldsymbol{F}(b)\big), \Big(2, \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}(b)\big)\Big), \Bigg(3, \boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}(b)\big)\Big)\Bigg)\Bigg\}.\end{gathered}$$

Özelliği olan kümelerin oluşturduğu sınıf, $\boldsymbol{C}$ olsun. O zaman $\bigcup \boldsymbol{C}$, istediğimiz $\boldsymbol{G}$ göndermesi olacaktır. Bunu göstermek için, tüm Peano Aksiyomları kullanılmalıdır.

Hemen $\{(0, b)\} \in \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $(0, b) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Şimdi $(k, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k, c) \in a$. O halde $a \cup \{(k', \boldsymbol{F}(c))\} \in \boldsymbol{C}$. Böylece $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Tümevarımla her k doğal sayısı için $\boldsymbol{A}$ sınıfının $(k, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ içerilmesini sağlayan c elemanı vardır, yani

$$\{x\colon \exists y \ (x, y) \in \bigcup \boldsymbol{C}\} = \omega.$$

Şimdi

$$\big\{x\colon \forall y \,\forall z \,\big((x, y) \in \bigcup \boldsymbol{C} \wedge (x, z) \in \bigcup \boldsymbol{C} \Rightarrow y = z\big)\big\} = \omega$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Soldaki küme, a_0 olsun. Eğer $(0, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise, o zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(0, e) \in a$, dolayısıyla $e = b$ olmalıdır, çünkü 0, ardıl değildir. Öyleyse $0 \in a_0$. Şimdi $k \in a_0$ olsun. Gösterdiğimiz gibi $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir c elemanı için $(k, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ve $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. $(k', d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k', d) \in a$. O halde a kümesinin bir (j, e) elemanı için $j' = k'$ ve $\boldsymbol{F}(e) = d$. Bu durumda $j = k$ olmalıdır. Böylece $(k, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $e = c$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$, çünkü $k \in a_0$ varsayılır. Öyleyse $k' \in a_0$. Tümevarımla $a_0 = \omega$.

Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$, ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir $\boldsymbol{G}$ göndermesidir. $\boldsymbol{C}$ sınıfının tanımından $\boldsymbol{G}$ göndermesinin istediğimiz özellikleri vardır. □

Şimdi, doğal sayılarda, (§), (¶), ve (‖) satırlarındaki bütün tanımlar geçerlidir.

3.6. Eşleniklik

$\boldsymbol{R}$ bir bağıntı ise, bu bağıntının **ters bağıntısı** veya **tersi** (*converse*),

$$\{(y, x) \colon x \mathrel{\boldsymbol{R}} y\}$$

bağıntısıdır. Bu ters bağıntı, $\breve{\boldsymbol{R}}$ olarak yazılır; yani

$$x \mathrel{\breve{\boldsymbol{R}}} y \quad \text{denktir} \quad y \mathrel{\boldsymbol{R}} x.$$

$\boldsymbol{S}$ bir bağıntı daha ise, o zaman tanım olarak

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S} = \{(x, z) \colon \exists y\ (x \mathrel{\boldsymbol{R}} y \wedge y \mathrel{\boldsymbol{S}} z)\}.$$

Bu yeni bağıntı, $\boldsymbol{R}$ ile $\boldsymbol{S}$ bağıntılarının **bileşkesidir** (*composite*). $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R}$ bileşkesi, $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S}$ bileşkesinden farklı olabilir.

Teorem 35. *Eğer* $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *ve* $\boldsymbol{G} \colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ *ise, o zaman*

$$\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C},$$

ve ayrıca $\forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G})(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x))\big)$.

Alıştırma 21. Teoremi kanıtlayın.

Teoremdeki durumda $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}$ göndermesi,

$$\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}$$

olarak yazılır.

Tekrar $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{F}$ bağıntısının $\breve{\boldsymbol{F}}$ ters bağıntısı, $\boldsymbol{B}$ sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir göndermeyse, o zaman bu gönderme, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **ters göndermesi** veya **tersidir** (*inverse*), ve

$$\boldsymbol{F}^{-1}$$

olarak yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfıyla bir **eşlemedir** (*bijection*), ve $\boldsymbol{F}^{-1}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfıyla bir eşlemedir.

Teorem 36. *$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfıyla bir eşlemedir ancak ve ancak $\boldsymbol{B}$ sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi için*

$$\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F} = \{(x,x)\colon x \in \boldsymbol{A}\}, \qquad \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G} = \{(x,x)\colon x \in \boldsymbol{B}\}.$$

Bu durumda $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^{-1}$.

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir eşleme ise, o zaman

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\approx} \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız.* Bu durumda, $\boldsymbol{F}^{-1}\colon \boldsymbol{B} \xrightarrow{\approx} \boldsymbol{A}$. Öyle bir $\boldsymbol{F}$ olduğundan, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları birbirine **eşleniktir** (*equipollent*).

Teorem 37. *Bir sınıf, bir kümeye eşlenikse, sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 23. Teoremi kanıtlayın.

* $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ ifadesi de mümkündür.

Teorem 37 ve 67 sayesinde *kümelerin* eşlenikliği, ikili bir bağıntıdır. Bu bağıntının işareti

$$\approx$$

olsun. O zaman $=$ gibi $\approx$, yeni bir yüklemdir (sayfa 29'a bakın). Ayrıca

$$\begin{aligned} a \approx b \quad \text{denktir} \quad \exists w \Big(&\forall x\ \exists y\ \big(x \in a \Rightarrow y \in b \land (x, y) \in w\big) \\ &\land \forall x\ \exists y\ \big(x \in b \Rightarrow y \in a \land (y, x) \in w\big) \\ &\land \forall x\ \forall y\ \forall z\ \Big(\big((x, y) \in w \land (x, z) \in w \Rightarrow y = z\big) \\ &\qquad \land \big((x, z) \in w \land (y, z) \in w \Rightarrow x = y\big)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Eşitlik gibi eşleniklik, bir denklik bağıntısıdır (sayfa 30'e bakın):

Teorem 38. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \approx a, \qquad a \approx b \Rightarrow b \approx a, \qquad a \approx b \land b \approx c \Rightarrow a \approx c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 24. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 39. *$\boldsymbol{R}$ bir denklik bağıntısı ise, o zaman*

$$\{x \colon x\ \boldsymbol{R}\ a\} \cap \{x \colon x\ \boldsymbol{R}\ b\} \neq \varnothing \to \{x \colon x\ \boldsymbol{R}\ a\} = \{x \colon x\ \boldsymbol{R}\ b\}.$$

Alıştırma 25. Teoremi kanıtlayın.

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$ ise $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$, birbirinden **ayrıktır** (*disjoint*). Teoremdeki $\{x \colon x\ \boldsymbol{R}\ a\}$ kümesi, $\boldsymbol{R}$ bağıntısına göre a kümesinin **denklik sınıfıdır** (*equivalance class*). Teoreme göre birbirinden farklı olan denklik sınıfları, birbirinden ayrıktır.

3.7. Kardinaller

Eşlenikliğe göre bir a kümesinin $\{x\colon x \approx a\}$ denklik sınıfına a kümesinin **büyüklüğü** (*size*) densin. Eğer a boş değilse $\{x\colon x \approx a\}$ sınıfı, küme değildir. Bu a kümesinin denklik sınıfı bir ordinal içerse, içerdiği en küçük ordinal vardır; bu ordinale a kümesinin **kardinali** (*cardinal*) denir, ve a kümesinin kardinali $\mathrm{kard}(a)$ olarak yazılacak. Böylece

$$\mathrm{kard}(a) = \min\{\xi\colon \xi \approx a\}.$$

(Sayfa 49'dan ξ harfinin ordinal değişkeni olduğunu hatırlayın.) Şimdilik her kümenin bir kardinalinin olup olmadığını bilmiyoruz. Ama her ordinalin kardinali vardır. Kardinaller, bir

$$\mathbf{KN}$$

sınıfını oluşturur. O zaman

$$\mathbf{KN} \subseteq \mathbf{ON}.$$

Bir doğal sayıyla eşlenik bir küme, **sonludur** (*finite*); sonlu olmayan bir sınıf, **sonsuzdur** (*infinite*). O zaman her sonlu kardinal, bir doğal sayıdır. Bu sonucun tersini kanıtlayacağız.

Birkaç tane von Neumann doğal sayısının tanımını, sayfa 11 ve sayfa 38'den hatırlayalım:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Bir a kümesinin

1) hiçbir elemanı yoksa, o zaman $a \approx 0$; aslında $a = 0$;
2) tek bir elemanı varsa, o zaman $a \approx 1$;
3) iki (ve sadece iki) elemanı varsa, o zaman $a \approx 2$;
4) üç (ve sadece üç) elemanı varsa, o zaman $a \approx 3$.

Ayrıca

$$0 \not\approx 1, \qquad 0 \not\approx 2, \qquad 0 \not\approx 3, \qquad 1 \not\approx 2, \qquad 1 \not\approx 3, \qquad 2 \not\approx 3.$$

Ancak herhangi iki eşlenik doğal sayı eşit olmalı mı? Bu soruyu, sayfa 6'da sormuştuk.

Teorem 40. *İki doğal sayı birbiriyle eşlenikse, birbirine eşittir:*

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \Rightarrow x \approx y \Rightarrow x = y).$$

Kanıt. Tümevarımla her n doğal sayısı için

$$\forall x\ (x \in \omega \land x \approx n \Rightarrow x = n)$$

cümlesini kanıtlayacağız. $n = 0$ ise doğrudur. $n = m$ ise doğru olsun, ve bir ℓ doğal sayısı için $m' \approx \ell$ olsun. O zaman ℓ boş değil, dolayısıyla bir bir ardıl olmalı. $\ell = k'$ olsun. m' sayısından k' sayısına giden bir f eşlemesi vardır. Eğer $f(m) = k$, o zaman $f \smallsetminus \{(m, k)\}$, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Eğer $f(m) \neq k$, o zaman

$$\big\{(x, y)\colon x \in m \smallsetminus \{f^{-1}(k)\} \land y = f(x)\big\} \cup \big\{(f^{-1}(k), f(m))\big\}$$

bağıntısı, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Öyleyse her durumda $m \approx k$. Hipotezimize göre $m = k$ olmalı, dolayısıyla $m' = \ell$. Kanıt bitti. □

Sonuç olarak her doğal sayı, sonlu bir kardinaldir, yani

$$\omega \subseteq \mathbf{KN}.$$

Sonraki bölümde **ON** sınıfını inceleyeceğiz; öbür bölümde, **KN**.

4. Ordinaller

Doğal sayılarda, bir göndermenin özyineli tanımının iki tane parçası vardır, biri 0 için, biri ardıllar için. Ordinallerde üçüncü bir parça gerekir, limitler için.

4.1. Supremumlar

Eğer $a \subseteq \beta'$ ise, o zaman $a \subseteq \mathbf{ON}$ ve

$$\forall \xi \ (\xi \in a \Rightarrow \xi \leqslant \beta),$$

dolayısıyla β, a kümesinin **üst sınırıdır** (*upper bound*). **ON** iyi-sıralanmış olduğundan a kümesinin **en küçük üst sınırı** (*least upper bound*) olmalıdır. Analizdeki gibi en küçük üst sınıra **supremum** (*supremum*) denir, ve a kümesinin supremumu için

$$\sup(a)$$

yazılır. Eğer $\sup(a) \in a$ ise, o zaman a kümesin **en büyük elemanı** (*greatest element*) veya **maksimumu** (*maximum*) vardır, ve tabii ki bu eleman, supremumdur. Ama $\sup(a) \notin a$ ise, a kümesinin en büyük elemanı yoktur.*

Tüm α ordinalleri için

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' \tag{$*$}$$

olacak. Ama β limitse, $\alpha + \beta$ nedir? Mesela $\alpha + \omega$ nedir? Aslında Teorem 34'e göre ω kümesinden **ON** sınıfına giden, $(*)$ satırındaki

*Latincede "yüksek" *superus, -a, -um*; "daha yüksek" *superior, -ius*; "en yüksek" *supremus, -a, -um*; "büyük" *magnus, -a, -um*; "daha büyük" *maior, -ius*; "en büyük" *maximus, -a, -um.*

özellikleri olan $x \mapsto \alpha + x$ göndermesi vardır. Her n doğal sayısı için,

$$\alpha + n < \alpha + \omega$$

eşitsizliğini isteriz. Yani $\alpha+\omega$, $\{y\colon \exists x\ (x \in \omega \wedge y = \alpha+x)\}$ sınıfının üst sınırı olmalıdır (sınıfın üst sınırı varsa). Bu sınıf, $\{\alpha+x\colon x \in \omega\}$ olarak yazılabilir.

Genelde $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ise $\{y\colon \exists x\ (x \in \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{F}(x) = y)\}$ sınıfı,

$$\{\boldsymbol{F}(x)\colon x \in \boldsymbol{C}\} \qquad \text{veya} \qquad \boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$$

olarak yazılabilir. Bu sınıf, $\boldsymbol{C}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **görüntüsüdür.** Bu durumda, $\boldsymbol{F}$ göndermesi $\boldsymbol{C}$ sınıfında **tanımlanır,** çünkü $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı tarafından kapsanır. Eğer $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{C}$ sınıfında tanımlanmazsa, $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$ ifadesini yazmayacağız.

ω kümesinin $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ görüntüsünün üst sınırı varsa, en küçük üst sınırı, yani supremumu, vardır (çünkü **ON**, iyisıralanır). Şimdi $(*)$ satırındaki özelliklere göre

$$\alpha \subset \alpha + 1 \subset \alpha + 2 \subset \cdots$$

Eğer $\bigcup\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ bir ordinalse, bu ordinal $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ kümesinin üst sınırıdır, aslında supremumudur. Bunu gösterelim.

Teorem 41. $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun.*

1. $\bigcup \boldsymbol{A}$ *bir kümeyse,* $\bigcup \boldsymbol{A} \in \mathbf{ON}$.

2. $\bigcup \boldsymbol{A}$ *bir küme değilse,* $\bigcup \boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. $b \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir α elemanı için $b \in \alpha$, dolayısıyla $b \subseteq \alpha$ ve onun için $b \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ geçişlidir. Ayrıca, **ON** sınıfı da geçişli olduğundan, $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$, dolayısıyla $\bigcup \boldsymbol{A}$, $\in$ tarafından iyisıralanır. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ ya bir ordinaldir, ya da küme olmayan bir sınıftır.

İkinci durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin **ON** olduğunu göstereceğiz. Eğer $\bigcup \boldsymbol{A} \subset \mathbf{ON}$ ise $\beta \in \mathbf{ON} \smallsetminus \bigcup \boldsymbol{A}$ olsun. Eğer $\gamma \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise, $\gamma \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\beta \notin \gamma$. Ayrıca $\gamma \neq \beta$, ve sonuç olarak $\gamma \in \beta$. Böylece $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \beta$. Bu durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$ bir kümedir, dolayısıyla ordinaldir. $\square$

Şimdi $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin bir küme olduğunu isteriz:

AKSİYOM 6 (Bileşim)**.** *Her kümenin bileşimi, bir kümedir:*

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \Leftrightarrow \exists w\, (w \in x \land z \in w)\big).$$

Teorem 42. *Ordinallerin oluşturduğu her kümenin bileşimi, kümenin supremumudur, yani* $a \subseteq \mathbf{ON}$ *ise*

$$\bigcup a = \sup(a).$$

Kanıt. $a \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. Son teorem ve Bileşim Aksiyomuna göre $\bigcup a$, bir α ordinalidir. O zaman α, a kümesinin bir üst sınırıdır. Eğer $\beta < \alpha$ ise, o zaman $\beta \in \alpha$, dolayısıyla a kümesinin bir γ elemanı için $\beta \in \gamma$, yani $\beta < \gamma$. Sonuç olarak β, a kümesinin üst sınırı değildir. Öyleyse $\alpha = \sup(a)$. $\square$

Şimdi $\{\alpha + x \colon x \in \omega\}$ gibi görüntüler, küme olsun:

AKSİYOM 7 (Yerleştirme)**.** *Her göndermenin tanım sınıfının altkümesinin gönderme altında görüntüsü, bir kümedir. Yani her ikili* $\varphi(x, y)$ *formülü için*

$$\forall w\, \Big(\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(\varphi(x,y) \land \varphi(x,z) \land x \in w \Rightarrow y = z\big) \\ \Rightarrow \exists z\, \forall y\, \Big(y \in z \Leftrightarrow \exists x\, \big(x \in w \land \varphi(x,y)\big)\Big)\Big).$$

Şimdi β ordinalinde $x \mapsto \alpha + x$ göndermesi tanımlanırsa $\{\alpha + x \colon x \in \beta\}$ görüntüsü, bir kümedir. β limitse

$$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\} \tag{†}$$

olsun. Bu koşul, $(*)$ satırındaki koşullarla, $\mathbf{ON}$ sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemesini tanımlayacaktır.

4.2. Tümevarım ve özyineleme

Teorem 43 (Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$,

2) her α *için* $\alpha \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha' \in \boldsymbol{A}$,

3) her α *limiti için* $\alpha \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha \in \boldsymbol{A}$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Hipotez altında $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. □

Eğer $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ise

$$\boldsymbol{F} \cap (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{F} \upharpoonright \boldsymbol{C}$$

olsun. Bu $\boldsymbol{F} \upharpoonright \boldsymbol{C}$ göndermesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{C}$ sınıfına **sınırlamasıdır** (*restriction*).

Teorem 44 (Ordinaller Özyinelemesi I)**.** $\boldsymbol{A}$ *bir sınıf olsun, ve*

$$b \in \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{G} \colon \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A}$$

olsun. O zaman $\mathbf{ON}$ *sınıfından* $\boldsymbol{A}$ *sınıfına giden*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{H}(0) = b, \\ \boldsymbol{H}(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)), \\ \alpha \textit{ limit ise } \boldsymbol{H}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}[\alpha]) \end{gathered}$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *göndermesi vardır.*

İki kanıt vereceğiz.

Kanıt 1. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{H}$ göndermesi vardır. Çünkü $\boldsymbol{H}_1$ göndermesinin ve $\boldsymbol{H}$ göndermesinin özellikleri aynı olsun. O zaman

1) $\boldsymbol{H}_1(0) = b = \boldsymbol{H}(0)$;

2) $\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{H}(\alpha)$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}_1(\alpha)) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)) = \boldsymbol{H}(\alpha');$$

3) α limit ise ve $\boldsymbol{H}_1 \restriction \alpha = \boldsymbol{H} \restriction \alpha$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}_1[\alpha]) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}[\alpha]) = \boldsymbol{H}(\alpha).$$

Teorem 34'ün kanıtındaki gibi bir $\boldsymbol{C}$ sınıfı için $\boldsymbol{H} = \bigcup \boldsymbol{C}$ olacaktır. Bu sınıfın tanımına göre her a elemanı için $a \subseteq \mathbf{ON} \times \boldsymbol{A}$, ve a kümesinin her (α, d) elemanı için,

- ya $(\alpha, d) = (0, b)$,
- ya da bir (β, c) elemanı için, $\beta' = \alpha$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$,
- ya da α limittir, ve $a \cap (\alpha \times \boldsymbol{A})$ kesişimi, tanım kümesi α olan bir f göndermesidir, ve $\boldsymbol{G}(f[\alpha]) = d$.

Eğer $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı $\mathbf{ON}$ olan bir gönderme değilse, bir *en küçük* α için

$$\left\{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge (\alpha, x) \in \bigcup \boldsymbol{C}\right\}$$

sınıfının ya hiç elemanı yoktur ya da en az iki elemanı vardır. O zaman $\alpha \neq 0$. Eğer $\alpha = \beta'$ ise, o zaman bir c için $(\beta, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $(\alpha, \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Bu durumda eğer $(\alpha, d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise bir e için $d = \boldsymbol{F}(e)$ ve $(\beta, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $c = e$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$ (çünkü α en küçüktür). Öyleyse α ardıl olamaz. Benzer şekilde α limit olamaz. Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı $\mathbf{ON}$ olan bir gönderme olmalıdır. Bu göndermenin, tanımından dolayı istediğimiz özellikleri vardır. □

Kanıt 2. Her β için β' kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden

$$h_\beta(0) = b,$$
$$\alpha < \beta \Rightarrow h_\beta(\alpha') = \boldsymbol{F}(h_\beta(\alpha)),$$
$$\alpha < \beta \wedge \alpha \text{ limit} \Rightarrow h_\beta(\alpha) = \boldsymbol{G}(h_\beta[\alpha])$$

özellikleri olan bir ve tek bir h_β göndermesinin olduğunu göstereceğiz. $\boldsymbol{B}$, istediğimiz özellikleri olan β ordinalleri oluşturduğu sınıf olsun. Eğer $\beta \in \boldsymbol{B}$, $\gamma \in \boldsymbol{B}$, ve $\beta \leqslant \gamma$ ise, o zaman g_β ve $g_\gamma \restriction \beta'$ göndermelerinin aynı özelliği vardır, dolayısıyla

$$g_\beta \subseteq g_\gamma.$$

Şimdi tümevarım kullanacağız.

1. $h_0 = \{(0, b)\}$ olabilir ve olmalıdır, dolayısıyla $0 \in \boldsymbol{B}$.

2. $\gamma \in \boldsymbol{B}$ ise $h_{\gamma'} = h_\gamma \cup \big\{\big(\gamma', \boldsymbol{F}(h_\gamma(\gamma))\big)\big\}$ olabilir ve olmalıdır, dolayısıyla $\gamma' \in \boldsymbol{B}$.

3. γ limit ve $\gamma \subseteq \boldsymbol{B}$ ise $\theta \leqslant \delta < \gamma$ olduğu zaman $h_\theta \subseteq h_\delta$ olmalıdır, dolayısıyla $h_\gamma = \bigcup\{h_\xi \colon \xi < \gamma\}$ olabilir ve olmalıdır, ve sonuç olarak $\gamma \in \boldsymbol{B}$.

Benzer şekilde $\boldsymbol{H} = \bigcup\{h_\xi \colon \xi \in \mathbf{ON}\}$ olabilir ve olmalıdır. □

Ordinaller Özyinelemesi Teoreminin farklı bir biçimi, Teorem 68 olacaktır. Ama ordinaller toplaması, çarpması, ve kuvvet alması için, son teorem yeter.

4.3. Toplama

Teorem 44'e göre her α için sayfa 60'taki $(*)$ ve sayfa 62'deki $(\dagger)$ satırlarındaki koşullar $\mathbf{ON}$ sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemini tanımlar. Yani tanıma göre

$$\begin{gathered}\alpha + 0 = \alpha,\\ \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)',\\ \beta \text{ limit} \Rightarrow \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\}.\end{gathered}$$

(Bazı kitaplarda farklı ama denk bir tanım verilir [15, s. 145]; sayfa 98'e bakın.) Özel durum olarak

$$\alpha + 1 = \alpha'.$$

Ayrıca $1 + \omega = \sup\{1 + x : x \in \omega\} = \omega < \omega + 1$, ve genelde

$$0 < n < \omega \quad \text{ise} \quad n + \omega = \omega < \omega + n.$$

Böylece **ON** sınıfında toplama değişmeli değildir. Özel olarak **ON** sınıfındaki

$$\xi \mapsto \alpha + \xi, \qquad\qquad \xi \mapsto \xi + \alpha$$

işlemleri birbirinden farklıdır. Birincisi, Teorem 46'ya göre *kesin artan* olacaktır; ikincisi, Teorem 47'ye göre sadece *artan* olacaktır. Şekil 3 ve 4'e bakın. Teoremleri kanıtlayarak aşağıdaki teoremdeki kuralları kullanacağız.

Teorem 45. *$a \subseteq$ **ON**, $\beta \in a$, ve $b \subseteq$ **ON** olsun.*

1. $\beta \leqslant \sup(a)$.
2. $b \subseteq a$ *ise* $\sup(b) \leqslant \sup(a)$.
3. $\forall \xi \; \big(\xi \in b \Rightarrow \exists \eta \; (\eta \in a \wedge \xi \leqslant \eta)\big)$ *ise* $\sup(b) \leqslant \sup(a)$.

Alıştırma 26. Teoremi kanıtlayın.

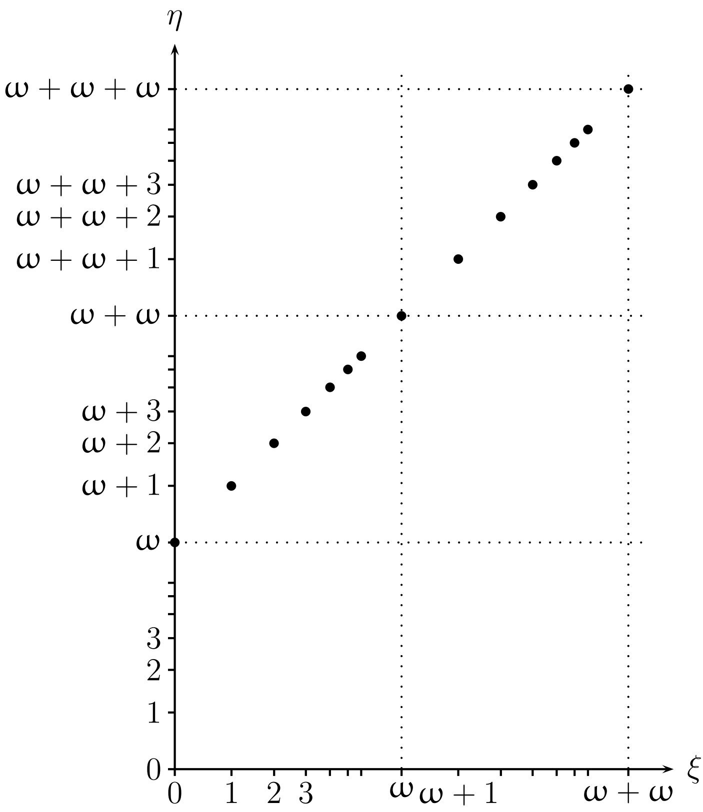
Teorem 46. *$\xi \mapsto \alpha + \xi$ göndermesi,* ***kesin artandır*** *(strictly increasing), yani*

$$\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

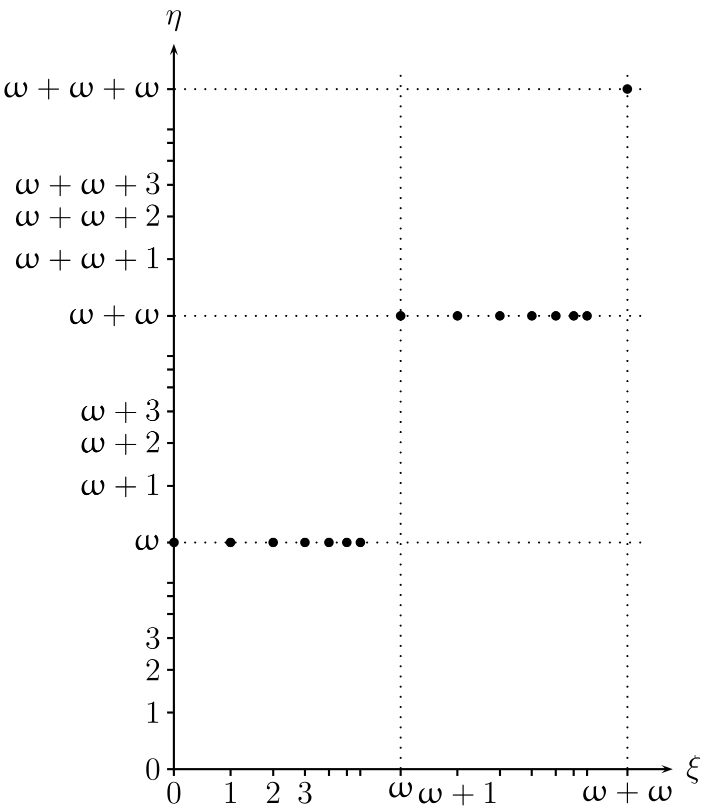
Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\gamma = 0$ ise, iddia doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\beta < 0$ değildir.
2. $\gamma = \delta$ durumda iddianın doğru olduğu varsayılsın. Eğer $\beta < \delta'$ ise, o zaman $\beta \leqslant \delta$, dolayısıyla

$$\alpha + \beta \leqslant \alpha + \delta < (\alpha + \delta)' = \alpha + \delta'.$$



Şekil 3. $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği



Şekil 4. $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

3. δ limit ve $\beta < \delta$ ise, o zaman $\beta < \beta' < \delta$, dolayısıyla (Teorem 45'in 1 şıkkını kullanarak)

$$\alpha + \beta < \alpha + \beta' \leqslant \sup_{\xi<\delta}(\alpha + \xi) = \alpha + \delta. \qquad \square$$

Son teoremin kanıtının 3. adımında $\gamma < \delta$ durumu içın iddianın doğru olduğu varsayım gerekmedi.

Teorem 47. *$\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi,* ***artandır,*** *yani*

$$\beta \leqslant \gamma \Rightarrow \beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha.$$

Kanıt. Şimdi α üzerinden tümevarım kullanacağız. $\beta \leqslant \gamma$ olsun.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 30'e göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. δ limit olsun, ve $\alpha < \delta$ ise, $\beta+\alpha \leqslant \gamma+\alpha$ varsayılsın. O zaman (Teorem 45'in 3 şıkkını kullanarak)

$$\beta + \delta = \sup_{\xi<\gamma}(\beta + \xi) \leqslant \sup_{\xi<\gamma}(\gamma + \xi) = \gamma + \delta. \qquad \square$$

Gördüğümüz gibi aynı zamanda $\beta < \gamma$ ama $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ olabilir, mesela Şekil 4'teki gibi

$$k < \ell < \omega \quad \text{ise} \quad k + \omega = \ell + \omega.$$

Ayrıca $\xi \mapsto \xi+\alpha$ göndermesi için analizdeki gibi "ara değer teoremi" yanlıştır. Örneğin $0 + \omega < \omega + 1 < \omega + \omega$, ama

$$\xi + \omega = \omega + 1$$

denkleminin hiç çözümü yoktur. Yine de $\xi \mapsto \alpha + \xi$ göndermesi için ara değer teoremi doğru olacaktır.

Teorem 48. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Alıştırma 27. Teoremi kanıtlayın.

Toplamanın başka bir anlayışı için, Teorem 85'te (sayfa 97'de), sonraki teorem kullanılacaktır.

Teorem 49 (Çıkarma)**.** *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta \tag{‡}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Bir ordinal bulmak için iki yöntemimiz vardır. Bu ordinal, bir ordinaller kümesinin *minimumu* veya *supremumu* olabilir. Burada (‡) denkleminin çözümü bir minimum olacaktır; başka yöntemle bir supremumdur (sayfa 75'e bakın). Teorem 46'ya göre denklemin en çok bir çözümü vardır. Teorem 47 ve 48'e göre

$$\alpha + \beta \geqslant 0 + \beta = \beta,$$

dolayısıyla $\{\xi \colon \beta \leqslant \alpha + \xi\}$ boş değildir (çünkü β elemanını içerir). Bu kümenin en küçük elemanı, δ olsun. Yani

$$\delta = \min\{\xi \colon \beta \leqslant \alpha + \xi\}$$

olsun. O zaman

$$\beta \leqslant \alpha + \delta.$$

Biz $\alpha + \delta \leqslant \beta$ eşitsizliğini göstereceğiz. Üç durum vardır.

1. $\delta = 0$ ise $\alpha + \delta = \alpha + 0 = \alpha \leqslant \beta$.
2. $\delta = \gamma'$ ise $\alpha + \gamma < \beta$, dolayısıyla (sayfa 50'deki Teorem 30'u kullanarak)

$$\alpha + \delta = (\alpha + \gamma)' \leqslant \beta.$$

3. δ limit olsun. Eğer $\gamma < \delta$ ise $\alpha + \gamma < \beta$ olmalıdır, dolayısıyla

$$\alpha + \delta = \sup_{\xi < \delta}(\alpha + \xi) \leqslant \beta. \qquad \square$$

$\alpha \leqslant \beta$ durumunda $\alpha + \xi = \beta$ denkleminin çözümü için

$$\beta - \alpha$$

ifadesi yazılabilir. Örneğin $\alpha' - 1 = \alpha$. Şimdi ordinaller toplamasının *birleşmeli* olduğunu göstereceğiz.

Teorem 50. *β limitse $\alpha + \beta$ toplamı da limittir.*

Alıştırma 28. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 51. *Ordinaller toplaması* ***birleşmelidir,*** *yani tüm α, β, ve γ için*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$.
2. $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$ ise

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \delta') = \alpha + (\beta + \delta)' &= (\alpha + (\beta + \delta))' \\ &= ((\alpha + \beta) + \delta)' = (\alpha + \beta) + \delta'. \end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve $\gamma < \delta$ ise $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \delta &= \sup_{\xi < \delta} \bigl((\alpha + \beta) + \xi\bigr) \\ &= \sup_{\xi < \delta} \bigl(\alpha + (\beta + \xi)\bigr) \\ &\leqslant \alpha + \sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi). \end{aligned}$$

δ limit olduğundan

$$\sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi) = \beta + \delta.$$

Bundan dolayı

$$(\alpha + \beta) + \delta \leqslant \alpha + (\beta + \delta);$$

ayrıca $\theta < \beta + \delta$ ise, bir γ için, $\gamma < \delta$ ve $\theta < \beta + \gamma$, yani

$$\forall \eta \ \big(\eta < \beta + \delta \Rightarrow \exists \xi \ (\xi < \delta \wedge \eta < \beta + \xi)\big).$$

Teorem 50'ye göre, $\beta + \delta$ bir limittir, dolayısıyla

$$\alpha + (\beta + \delta) = \sup_{\eta < \beta + \delta} (\alpha + \eta).$$

O halde (Teorem 45'in 3 şıkkını kullanarak)

$$\sup_{\eta < \beta + \delta} (\alpha + \eta) \leqslant \sup_{\xi < \delta} \big(\alpha + (\beta + \xi)\big) = (\alpha + \beta) + \delta.$$

Sonuç olarak $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$. □

4.4. Normal işlemleri

Aslında son teoremin kanıtı, genel bir yöntem kurur. $\boldsymbol{F}$, **ON** üzerinde birli bir işlem olsun, yani $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Analizdeki gibi, bir α için, eğer

$$\beta < \boldsymbol{F}(\alpha) < \gamma$$

eşitsizliğini sağlayan her β ve γ için,

$$\delta < \alpha < \theta, \qquad \forall \xi \ (\delta < \xi < \theta \Rightarrow \beta < \boldsymbol{F}(\xi) < \gamma)$$

koşullarını sağlayan δ ve θ varsa, o zaman $\boldsymbol{F}$ göndermesi α noktasında **süreklidir** (*continuous*). Eğer $\alpha = 0$ veya $\boldsymbol{F}(\alpha) = 0$ ise, tanım bir az değişiktir.

Teorem 52. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun.*

1. *Limit olmayan her ordinalde* $\boldsymbol{F}$ *süreklidir.*

2. $\boldsymbol{F}$ *artan olsun ve* α *bir limit olsun. O zaman* α *noktasında* $\boldsymbol{F}$ *süreklidir ancak ve ancak*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup(\boldsymbol{F}[\alpha]).$$

Alıştırma 29. Teoremi kanıtlayın.

ON üzerinde kesin artan ve sürekli birli bir işleme **normal** (*normal*) diyeceğiz.

Teorem 53. *Her α için*

$$\xi \mapsto \alpha + \xi$$

işlemi normaldir. Özel olarak $\xi \mapsto \xi$ normaldir.

Kanıt. Toplamanın tanımı ve Teorem 46 ve 48. □

Şimdilik $\xi \mapsto \alpha + \xi$ işlemleri, tek örneğimizdir:

Alıştırma 30. $\alpha > 0$ olsun. Aşağıdaki işlemlerin normal olmadığını gösterin:

$$\xi \mapsto \xi + \alpha, \qquad \xi \mapsto \xi', \qquad \xi \mapsto \xi + \xi.$$

Teorem 51'in kanıtının 3. adımında

$$\alpha + \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi) = \sup_{\xi<\delta}(\alpha + (\beta + \xi))$$

eşitliğini gösterdik, ve bunun için sadece

1) $\xi \mapsto \alpha + \xi$ işleminin normal olduğunu,

2) δ limit iken $\sup\{\beta + \xi \colon \xi < \delta\}$ ordinalinin limit olduğunu

kullandık. Aslında 2. koşulun yerinde aşağıdaki teorem kullanılabilir.

Teorem 54. *Eğer* $0 \subset a \subset \mathbf{ON}$ *ve* $\sup(a) \notin a$ *ise, o zaman* $\sup(a)$*, bir limittir.*

Alıştırma 31. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 55. $\boldsymbol{F}$ *normal bir işlem olsun. Ordinallerin oluşturduğu, boş olmayan tüm a kümeleri için*

$$\boldsymbol{F}\big(\sup(a)\big) = \sup\big(\boldsymbol{F}[a]\big).$$

Alıştırma 32. Teoremi kanıtlayın. İki durum vardır. $\sup(a) \in a$ ise kanıt kolaydır. $\sup(a) \notin a$ ise limit olmalıdır, ve bu durumda kanıt, Teorem 51'in kanıtının 3. adımındaki gibidir.

Teoremde a boş olmamalıdır, çünkü $\sup(\boldsymbol{F}[0]) = \sup(0) = 0$, ama $\boldsymbol{F}(0) > 0$ olabilir. Örneğin $\omega + 0 = \omega > 0$. Teoremin bir sonucu, Teorem 57 olacaktır. Kanıtı için sonraki teoremi de kullanacağız.

Teorem 56. *Eğer* $\boldsymbol{F}$*,* **ON** *sınıfında kesin artan bir işlemse, tüm* α *için*

$$\alpha \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Kanıt. $\alpha > \boldsymbol{F}(\alpha)$ ise, $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\boldsymbol{F}(\alpha) > \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}(\alpha))$, dolayısıyla $\{\xi\colon \xi > \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur. **ON** iyisıralanmış olduğundan $\{\xi\colon \xi > \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfı boş olmalıdır. □

Bu teorem sayesinde $\gamma \leqslant \alpha+\gamma$, dolayısıyla $\alpha+\xi = \beta$ denkleminin çözümü β ordinalinden büyük olamaz. Diğer taraftan bunu zaten biliyoruz çünkü

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 + \gamma && \text{[Teorem 48]} \\ &\leqslant \alpha + \gamma. && \text{[Teorem 47]} \end{aligned}$$

Teorem 57. $\boldsymbol{F}$ *normal ve* $\boldsymbol{F}(0) \leqslant \alpha$ *olsun. O zaman* $\{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\}$ *sınıfı bir kümedir, ve bu kümenin en büyük elemanı vardır.*

Kanıt. Son teoremi kullanarak

$$\{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\} \subseteq \alpha'$$

kapsanmasını biliyoruz, dolayısıyla $\{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\}$ sınıfı bir kümedir. Teorem 55'i kullanarak

$$\boldsymbol{F}(\sup\{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\}) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \beta\} \leqslant \beta,$$

dolayısıyla $\sup\{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\} \in \{\xi\colon \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \alpha\}$, yani bu kümenin en büyük elemanı vardır. □

Şimdi Teorem 49'un başka bir kanıtı vardır. Eğer $\alpha \leqslant \beta$ ise, o zaman $\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}$ sınıfı, en büyük elemanı olan bir küme olmalıdır. En büyük elemanı δ olsun. Eğer $\alpha + \delta < \beta$ ise, o zaman

$$\alpha + \delta' = (\alpha + \delta)' \leqslant \beta,$$

ki bu imkânsızır. Sonuç olarak $\alpha + \delta = \beta$. Benzer şekilde Teorem 64'ü kanıtlayacağız.

4.5. Çarpma

Her α için **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha \cdot x$ işlemi, tanımına göre,

$$\begin{gathered} \alpha \cdot 0 = 0, \\ \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha, \\ \gamma \text{ limit} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi\colon \xi < \gamma\} \end{gathered}$$

koşulları sağlar. Özel olarak

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

O zaman $\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = \sup\{\omega + x\colon x \in \omega\}$, ama

$$2 \cdot \omega = \sup_{x \in \omega}(2 \cdot x) = \omega,$$

dolayısıyla $2 \cdot \omega < \omega \cdot 2$. Öyleyse çarpma değişmeli değildir.

Teorem 58. $0 \cdot \alpha = 0$ *ve* $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Alıştırma 33. Teoremi kanıtlayın.

$\alpha \geqslant 1$ ise, $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işleminin normal olduğunu kanıtlayacağız. İşlemin kesin artan olduğunu göstermek yeter. Teorem 46'nın kanıtı, genel bir yöntem kurur:

Teorem 59. *Eğer* $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$, *ve tüm* α *için*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha'),$$

ve limit olan tüm β *için*

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup_{\xi<\beta} \boldsymbol{F}(\xi)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ *normaldir.*

Alıştırma 34. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 60. $\alpha \geqslant 1$ *ise* $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ *işlemi, normaldir.*

Alıştırma 35. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 61. *Ordinaller çarpması, toplama üzerine* ***soldan dağılır,*** *yani*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Kanıt. 1. $\gamma = 0$ durumunda kanıt kolaydır.

2. $\gamma = \delta$ durumunda iddia doğruysa

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta') &= \alpha \cdot (\beta + \delta)' && [+ \text{ tanımı}] \\
&= \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha && [\cdot \text{ tanımı}] \\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha && [\text{hipotez}] \\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) && [\text{Teorem 51}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta'; && [+ \text{ tanımı}]
\end{aligned}$$

böylece $\gamma = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Son olarak δ limit, ve $\gamma < \delta$ durumunda iddia doğru olsun. $\gamma = \delta$ durumunu kanıtlayacağız. $\alpha = 0$ ise iddia kolaydır. $\alpha \geqslant 1$ olsun. O zaman $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ ve $\xi \mapsto \alpha \cdot \beta + \xi$ işlemleri normal olduğundan

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi) && [\cdot \text{ tanımı}] \\
&= \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot (\beta + \xi)) && [\text{Teorem 55: } \xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normal}] \\
&= \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) && [\text{hipotez}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \xi) && [\text{Teorem 55: } \xi \mapsto \alpha \cdot \beta + \xi \text{ normal}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta. && [\cdot \text{ tanımı}] \qquad \square
\end{aligned}$$

Gördüğümüz gibi $2 \cdot \omega < \omega + \omega$, dolayısıyla

$$(1 + 1) \cdot \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega.$$

Öyleyse çarpma sağdan dağılmaz.

Teorem 62. *Ordinaller çarpması birleşmelidir, yani*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

Alıştırma 36. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 63. *Her $\xi \mapsto \xi \cdot \alpha$ işlemi artandır, yani*

$$\beta \leqslant \gamma \Rightarrow \beta \cdot \alpha \leqslant \gamma \cdot \alpha.$$

Alıştırma 37. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 64 (Bölme)**.** *$1 \leqslant \alpha$ ise (ξ, η) için*

$$\alpha \cdot \xi + \eta = \beta \qquad \wedge \qquad \eta < \alpha \tag{§}$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Teorem 57'ye göre $\{\xi\colon \alpha\cdot\xi \leqslant \beta\}$ kümesinin en büyük γ elemanı vardır. Teorem 49'a göre $\alpha\cdot\gamma+\eta=\beta$ denkleminin δ çözümü vardır. Eğer $\delta \geqslant \alpha$ ise

$$\alpha\cdot\gamma' = \alpha\cdot\gamma+\alpha \leqslant \alpha\cdot\gamma+\delta=\beta,$$

dolayısıyla $\gamma' \leqslant \gamma$, ki bu imkânsızdır. Öyleyse $\delta < \alpha$, ve böylece (γ,δ), (§) sisteminin istediğimiz çözümdür. Benzer şekilde başka çözüm yoktur. Aslında eğer (γ_1,δ_1), başka bir çözüm ise, o zaman $\gamma=\gamma_1 \wedge \delta<\delta_1$ veya $\gamma<\gamma_1$ varsayılabilir. Birinci durumda

$$\alpha\cdot\gamma+\delta < \alpha\cdot\gamma+\alpha = \alpha\cdot\gamma' \leqslant \alpha\cdot\gamma_1 \leqslant \alpha\cdot\gamma_1+\delta_1;$$

ve ikinci durumda $\alpha\cdot\gamma+\delta = \alpha\cdot\gamma_1+\delta < \alpha\cdot\gamma_1+\delta_1$; her sonuç imkânsızdır. □

4.6. Kuvvet alma

Her α için, $\alpha>0$ ise, **ON** sınıfında $x\mapsto\alpha^x$ işlemi, tanımına göre,

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta\cdot\alpha,$$
$$\gamma \text{ limit} \Rightarrow \alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi\colon \xi<\gamma\}$$

koşullarını sağlar. Özel olarak

$$\alpha^1=\alpha.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$0^0 = 1, \qquad\qquad \beta>0 \Rightarrow 0^\beta = 0.$$

Öyleyse γ limit ise 0^γ kuvveti, $\sup\{0^\xi\colon \xi<\gamma\}$ değildir, ama

$$0^\gamma = \sup\{0^\xi\colon 0<\xi<\gamma\}.$$

Teorem 65.

1. $1^\alpha = 1$.
2. $\alpha \geqslant 1$ *ise* $\xi \mapsto \xi^\alpha$ *artandır.*
3. $\alpha \geqslant 2$ *ise* $\xi \mapsto \alpha^\xi$ *işlemi, normaldir.*
4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.
5. $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

Alıştırma 38. Teoremi kanıtlayın.

4.6.1. Ordinal tabanları

İlkokuldan bildiğimiz gibi, eğer $2 \leqslant t < \omega$ ve $1 \leqslant a < \omega$ ise, o zaman t sayısından küçük olan bazı a_0, a_1, …, a_n doğal sayıları için

$$a = t^n \cdot a_0 + t^{n-1} \cdot a_1 + \cdots + t^0 \cdot a_n. \qquad (\P)$$

Bu durumda, $a_0 \neq 0$ ise, o zaman a sayısı,

$$a_0 a_1 \dots a_n \qquad \text{veya} \qquad (a_0 a_1 \dots a_n)_t$$

olarak yazılabilir; bu ifade, a sayısının t **tabanında yazılımıdır** [15, 17. böl.] (*base-t numeral*). 0 olan a_i **rakamları** (*digits*) çıkartılırsa, bir m doğal sayısı için,

$$a = t^{b_0} \cdot c_0 + t^{b_1} \cdot c_1 + \cdots + t^{b_m} \cdot c_m,$$
$$b_0 > b_1 > \cdots > b_m,$$
$$\{c_0, c_1, \dots, c_m\} \subseteq \{1, \dots, t-1\}$$

koşullarını sağlayan b_i ve c_i doğal sayıları vardır. Böylece t tabanı ve a sayısı,

$$\{(b_0, c_0), (b_1, c_1), \dots, (b_m, c_m)\}$$

göndermesini belirtir. Göstereceğimiz gibi 1'den büyük olan her ordinal tabanı için, 0 olmayan her ordinal, böyle bir gönderme belirtir.

Tabii ki (¶) satırındaki gibi ifadelerin özyinelemeli tanımı vardır:

1. $n = 0$ ise $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0$.

2. $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1}) + \alpha_n$.

Şimdi ξ ve η gibi ζ harfinin ordinal değişken olduğunu hatırlayın.

Teorem 66. *$2 \leqslant \alpha$ ve $1 \leqslant \beta$ ise (ξ, η, ζ) için*

$$\alpha^\xi \cdot \eta + \zeta = \beta \qquad \wedge \qquad 0 < \eta < \alpha \qquad \wedge \qquad \zeta < \alpha^\xi$$

sisteminin bir ve tek bir (γ, δ, θ) çözümü vardır, ve ayrıca $\gamma \leqslant \beta$.

Alıştırma 39. Teoremi kanıtlayın. (Teorem 64'e bakın.)

Sonuç olarak $\alpha > 1$ ise, 0 olmayan her β için

$$\begin{gathered}\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots, \\ \{\delta_0, \delta_1, \dots\} \subseteq \alpha \setminus \{0\}, \\ \gamma_0 > \gamma_1 > \cdots\end{gathered}$$

koşullarını sağlayan γ_i ve δ_i ordinalleri vardır. Ayrıca, **ON** iyi-sıralanmış olduğundan, kesin azalan $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ dizisi sona ermelidir. Yani bir n doğal sayısı için

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_n} \cdot \delta_n.$$

Buradaki $\{(\gamma_0, \delta_0), (\gamma_1, \delta_1), \dots, (\gamma_n, \delta_n)\}$ kümesi, bir göndermedir, ve Teorem 69'da

$$\beta_\alpha$$

adı ona verilecek.* Genel olarak bu kümeyi tanımlamak için (yani $\xi \mapsto \xi_\alpha$ göndermesini tanımlamak için), özyineleme yöntemini Teorem 44'ten farklı bir şekilde kullanacağız.

*Bu β_α ifadesi, benimdir; başka kitaplarda görmedim.

Teorem 67. *Tanım sınıfı bir küme olan her gönderme bir kümedir.*

Alıştırma 40. Teoremi kanıtlayın.

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı ve b kümesi için

$$^{b}\boldsymbol{A},$$

b kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden göndermelerin sınıfı olsun.

Teorem 68 (Ordinaller Özyinelemesi II)**.** *$\boldsymbol{A}$ bir sınıf olsun, ve*

$$\boldsymbol{F}\colon \{x\colon \exists \eta\ x \in {}^{\eta}\boldsymbol{A}\} \to \boldsymbol{A}$$

olsun. O zaman* **ON** *sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden ve her α ordinali için*

$$\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \upharpoonright \alpha)$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır.

Kanıt. Her β için β' kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfa giden

$$\alpha < \beta \Rightarrow g_{\beta}(\alpha) = \boldsymbol{F}(g_{\beta} \upharpoonright \alpha)$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir g_{β} göndermesi olduğunu göstereceğiz. $\boldsymbol{B}$, istediğimiz özelliği olan β ordinallerinin oluşturduğu sınıf olsun. Teorem 44'ün ikinci kanıtındaki gibi $\gamma \subseteq \boldsymbol{B}$ ise $\theta \leqslant \delta < \gamma$ olduğu zaman

$$g_{\theta} \subseteq g_{\delta}.$$

Bu durumda $h_{\gamma} = \bigcup_{\xi<\gamma} g_{\xi}$ olsun. O zaman $h_{\gamma}\colon \gamma \to \boldsymbol{A}$, ve $\delta < \gamma$ ise $h_{\gamma}(\delta) = g_{\delta}(\delta)$, ve

$$g_{\gamma} = h_{\gamma} \cup \{(\gamma, \boldsymbol{F}(h_{\gamma}))\}$$

olabilir ve olmalıdır, dolayısıyla $\gamma \in \boldsymbol{B}$. Böylece $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{B}$ farkının en küçük elemanı yoktur, dolayısıyla $\boldsymbol{B} = \mathbf{ON}$. Sonuç olarak $\boldsymbol{G} = \bigcup\{g_{\xi}\colon \xi \in \mathbf{ON}\}$ olabilir ve olmalıdır. □

*$\{x\colon \exists\eta\ x \in {}^{\eta}\boldsymbol{A}\}$ sınıfı, $\bigcup_{\eta} {}^{\eta}\boldsymbol{A}$ olarak yazılabilir; ama ${}^{\beta}\boldsymbol{A}$ sınıfları küme olmayabilir.

Teorem 69. *$\alpha \geqslant 2$ olsun. $0_\alpha = \varnothing$ ve 0 olmayan her β için*

$$\alpha^\gamma \cdot \delta + \theta = \beta, \qquad 0 < \delta < \alpha, \qquad \theta < \alpha^\gamma \tag{$\|$}$$

koşulları sağlandığı zaman

$$\beta_\alpha = \{(\gamma, \delta)\} \cup \theta_\alpha$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir $\xi \mapsto \xi_\alpha$ göndermesi vardır. Her β için,

- *β_α kümesi, değer kümesi* **ON** *sınıfının bir altkümesi olan bir göndermedir;*

- *bir n doğal sayısı için, β_α göndermesinin tanım kümesi, tanım kümesi n olan, kesin azalan bir f göndermesinin değer kümesidir;*

- *$i < n$ koşulu sağlandığı zaman $f(i) = \gamma_i$ ve $\beta_\alpha\big(f(i)\big) = \delta_i$ ise*

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{n-1}} \cdot \delta_{n-1}.$$

Kanıt. Teorem 66'ya göre, ($\|$) koşullarını sağlayan bir ve tek bir (γ, δ, θ) üçlüsü vardır. Ayrıca $\theta < \beta$. O zaman öyle bir $\boldsymbol{F}$ göndermesi vardır ki her β için, eğer g, tanım kümesi β olan (ve değer kümesi herhangi bir küme olan) bir gönderme, ve (γ, δ, θ) üçlüsü, ($\|$) satırındaki gibiyse, o zaman

$$\boldsymbol{F}(g) = \{(\gamma, \delta)\} \cup g(\theta).$$

Öyleyse istediğimiz $\beta \mapsto \beta_\alpha$ göndermesi, son teoreme göre

$$\boldsymbol{G}(\beta) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \upharpoonright \beta)$$

koşulunu sağlayan $\boldsymbol{G}$ göndermesidir. □

4.7. ω tabanı (Cantor normal biçimi)

Teorem 69'a göre, her α için, bir n doğal sayısı için, tanım kümesi n olan,

$$\alpha_0 > \cdots > \alpha_{n-1}, \qquad \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq \omega \setminus \{0\}$$

koşullarını sağlayan bir $x \mapsto (\alpha_x, a_x)$ göndermesi için

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n. \tag{$**$}$$

Sayfa 13'te dediğimiz gibi bu toplam, β ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Bu bölümde, Cantor normal biçimleriyle hesaplama kurallarını kuracağız. İlk olarak $(**)$ satırındaki α_0 üssüne α ordinalinin **derecesi** (*degree*) denecektir, ve bu derece

$$\operatorname{der}(\alpha)$$

olarak yazılacaktır.

4.7.1. Toplama

Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m,$$
$$\beta = \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n$$

olsun. O zaman ordinaller toplaması birleşmeli olduğundan

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m + \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n. \tag{$\dagger\dagger$}$$

Ama $\alpha + \beta$ toplamının Cantor normal biçimi nedir?

- $\alpha_m > \beta_0$ ise $(\dagger\dagger)$ satırındaki ifade zaten $\alpha + \beta$ toplamının Cantor normal biçimidir.

- $\alpha_m = \beta_0$ ise ordinaller çarpmasının soldan dağılmasını kullanarak

$$\begin{aligned}\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot a_{m-1} \\ + \omega^{\alpha_m} \cdot (a_m + b_0) + \omega^{\beta_1} \cdot b_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n,\end{aligned}$$

ve bu ifade $\alpha + \beta$ toplamının Cantor normal biçimidir.
- $\alpha_m < \beta_0$ ise

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot a_{m-1} + \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n$$

eşitliğini göstereceğiz.

Teorem 70. $\alpha > 0$ *ise*

$$1 + \omega^\alpha = \omega^\alpha.$$

Alıştırma 41. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 71. $\mathrm{der}(\alpha) < \mathrm{der}(\beta)$ *ise*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Kanıt. $\alpha < \beta$ ise $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bu durumda bir γ için, $\beta = \alpha + \gamma$ ve $\gamma > 0$, dolayısıyla

$$\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\alpha + \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\alpha \cdot (1 + \omega^\gamma) = \omega^\alpha \cdot \omega^\gamma = \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\beta. \quad \square$$

Örneğin

$$\begin{aligned}(\omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot 4+7} \cdot 5 + \omega^{\omega \cdot 2} \cdot 7 + 2) + (\omega^{\omega \cdot 4+7} \cdot 8 + \omega \cdot 3 + 16) \\ = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot 4+7} \cdot 13 + \omega \cdot 3 + 16.\end{aligned}$$

4.7.2. Çarpma

Tekrar Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m,$$
$$\beta = \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n$$

olsun. O zaman

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \alpha \cdot \omega^{\beta_n} \cdot b_n.$$

Şimdi $\alpha \cdot \omega^{\beta_k} \cdot b_k$ çarpımlarının Cantor normal biçimini bulacağız. İki durum vardır.

1. $\beta_k = 0$ olsun. O zaman $\alpha \cdot \omega^{\beta_k} \cdot b_k = \alpha \cdot b_k$. Şimdi α,

$$\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + (\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m)$$

olarak düşünülebilir. Burada $\omega^{\alpha_0} \cdot a_0$ çarpımı, α ordinalinin **"başıdır"** (*head*) ve $\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m$ toplamı, α ordinalinin **"kuyruğudur"** (*tail*). Bu kuyruk, γ olsun. O zaman Teorem 71'e göre

$$\gamma + \omega^{\alpha_0} = \omega^{\alpha_0},$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot b_k &= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot b_k \\
&= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) + \cdots + (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + (\gamma + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0) + \cdots + (\gamma + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0) + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot b_k + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot b_k + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m.
\end{aligned}$$

2. $\beta_k \geqslant 1$ olsun. O zaman bir δ için $\beta_k = 1 + \delta$, dolayısıyla

$$\alpha \cdot \omega^{\beta_k} \cdot b_k = \alpha \cdot \omega \cdot \omega^{\delta} \cdot b_k.$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \omega &= \sup_{x<\omega}(\alpha \cdot x) \\
&= \sup_{x<\omega}(\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot x + \gamma) \\
&\leqslant \sup_{x<\omega}\big(\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot (x+1)\big) \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot \sup_{x<\omega}\big(a_0 \cdot (x+1)\big) \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot \omega \\
&= \omega^{\alpha_0+1},
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\omega^{\alpha_0+1} = \sup_{x<\omega}(\omega^{\alpha_0} \cdot x) \leqslant \sup_{x<\omega}(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \omega,$$

dolayısıyla $\alpha \cdot \omega = \omega^{\alpha_0+1}$ ve

$$\alpha \cdot \omega^{\beta_k} \cdot b_k = \omega^{\alpha_0+\beta_k} \cdot b_k.$$

Bulduğumuz kuralları, resmi teoremler olarak yazıp kanıtlayalım.

Teorem 72. $\alpha > \operatorname{der}(\beta)$ *ve* $1 \leqslant k < \omega$ *ve* $1 \leqslant n < \omega$ *ise*

$$(\omega^\alpha \cdot k + \beta) \cdot n = \omega^\alpha \cdot k \cdot n + \beta.$$

Kanıt. $n = 1$ durumunda iddia doğrudur. $n = m$ durumunda doğru ise

$$\begin{aligned}
(\omega^\alpha \cdot k + \beta) \cdot (m+1) &= (\omega^\alpha \cdot k + \beta) \cdot m + \omega^\alpha \cdot k + \beta \\
&= \omega^\alpha \cdot k \cdot m + \beta + \omega^\alpha \cdot k + \beta \\
&= \omega^\alpha \cdot k \cdot m + \omega^\alpha \cdot k + \beta \\
&= \omega^\alpha \cdot k \cdot (m+1) + \beta,
\end{aligned}$$

dolayısıyla $n = m + 1$ durumunda da doğrudur. Tümevarımdan $1 \leqslant n < \omega$ ise iddia doğrudur. □

Örneğin

$$(\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot 7 = \omega^{\omega} \cdot 14 + \omega + 5.$$

Teorem 73. *$1 \leqslant \alpha$ ve $0 < \beta$ ise*

$$\alpha \cdot \omega^{\beta} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)+\beta}.$$

Kanıt. Önce $\beta = 1$ durumunda iddiayı kanıtlayacağız. $1 \leqslant \alpha < \omega$ ise $\mathrm{der}(\alpha) = 0$, dolayısıyla

$$\alpha \cdot \omega^1 = \alpha \cdot \omega = \sup_{x \in \omega} \alpha \cdot x = \omega = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)+1}.$$

Şimdi $\omega \leqslant \alpha$ olsun. O zaman

$$\alpha = \omega^{\gamma} \cdot k + \delta, \qquad \alpha > \mathrm{der}(\gamma), \qquad 1 \leqslant k < \omega$$

koşullarını sağlayan γ, k, ve δ vardır. O halde $1 \leqslant n < \omega$ ise

$$\begin{gathered}\omega^{\gamma} \cdot k \leqslant \alpha \leqslant \alpha \cdot n = \omega^{\gamma} \cdot k \cdot n + \delta < \omega^{\gamma} \cdot (k \cdot n + 1) < \omega^{\gamma+1},\\ \omega^{\gamma+1} = \sup_{1 \leqslant \xi < \omega} (\omega^{\gamma} \cdot \xi) \leqslant \sup_{1 \leqslant \xi < \omega} (\alpha \cdot \xi) \leqslant \omega^{\gamma+1},\\ \alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma+1} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)+1}.\end{gathered}$$

Genelde $\alpha \geqslant 1$ ve $\beta \geqslant 1$ ise, bir θ için $\beta = 1 + \theta$, dolayısıyla

$$\alpha \cdot \omega^{\beta} = \alpha \cdot \omega \cdot \omega^{\theta} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)+1+\theta} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)+\beta}. \qquad \square$$

Örneğin

$$\begin{gathered}5 \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7) = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 35,\\ (\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16) = \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16,\end{gathered}$$

ve

$$\begin{aligned}&(\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7)\\ &\qquad = \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16 + \omega^{\omega} \cdot 14 + \omega + 5.\end{aligned}$$

4.7.3. Kuvvet alma

Tekrar Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m,$$
$$\beta = \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n$$

olsun. O zaman

$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega^{\beta_0} \cdot b_0} \cdots \alpha^{\omega^{\beta_n} \cdot b_n}.$$

Şimdi $\alpha^{\omega^{\beta_k} \cdot b_k}$ kuvvetlerini bulacağız. İki durum vardır.

1. $\beta_k = 0$ ise $\alpha^{\omega^{\beta_k} \cdot b_k} = \alpha^{b_k} = \alpha \cdots \alpha$. Ayrıca $m > 0$ ve $\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m$ ise

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \alpha \cdot \alpha \\
&= \alpha \cdot (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \\
&= \alpha \cdot \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 + \alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma,
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 \\
&= \alpha \cdot (\omega^{\alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma) \\
&= \alpha \cdot \omega^{\alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \alpha \cdot \gamma \\
&= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot \omega^{\alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 + \alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 \cdot 3} \cdot a_0 + \alpha^2 \cdot \gamma,
\end{aligned}$$

ve genelde

$$\alpha^{n+1} = \omega^{\alpha_0 \cdot (n+1)} \cdot a_0 + \alpha^n \cdot \gamma.$$

2. $\beta_k \geqslant 1$ olsun. O zaman bir δ için $\beta_k = 1 + \delta$, dolayısıyla

$$\alpha^{\omega^{\beta_k} \cdot b_k} = (\alpha^\omega)^{\omega^\delta \cdot b_k}.$$

Şimdi iki durum daha vardır.

a) α sonlu (yani $\alpha_0 = 0$) olsun. O zaman

$$\alpha^{\omega} = {a_0}^{\omega} = \sup_{x<\omega}({a_0}^{x}) = \omega,$$

dolayısıyla

$$\alpha^{\omega^{\beta_k}\cdot b_k} = \omega^{\omega^{\delta}\cdot b_k}.$$

b) $\alpha \geqslant \omega$ (yani $\alpha_0 > 0$) olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\alpha^{\omega} &= \lim_{x<\omega}(\alpha^{x}) \\
&= \lim_{x<\omega}(\omega^{\alpha_0\cdot x}\cdot a_0 + \alpha^{n-1}\cdot\gamma) \\
&\leqslant \lim_{x<\omega}\left(\omega^{\alpha_0\cdot(x+1)}\right) \\
&= \omega^{\sup_{x<\omega}\left(\alpha_0\cdot(x+1)\right)} \\
&= \omega^{\alpha_0\cdot\omega},
\end{aligned}$$

ve

$$\omega^{\alpha_0\cdot\omega} \leqslant \alpha^{\omega},$$

dolayısıyla $\alpha^{\omega} = \omega^{\alpha_0\cdot\omega}$ ve

$$\alpha^{\omega^{\beta_k}\cdot b_k} = \omega^{\alpha_0\cdot\omega^{\beta_k}\cdot b_k}.$$

İki teorem çıkar.

Teorem 74. $1 \leqslant k < \omega$ *ve* $n < \omega \leqslant \alpha$ *ise*

$$k^{\omega^{n+1}} = \omega^{\omega^{n}}, \qquad\qquad k^{\omega^{\alpha}} = \omega^{\omega^{\alpha}}.$$

Alıştırma 42. Teoremi kanıtlayın. *İpucu:* $n+1 = 1+n$ ve $\alpha = 1+\alpha$.

Örneğin

$$2^{\omega^{\omega}\cdot 3+\omega^{5}\cdot 4+\omega\cdot 7+5} = \omega^{\omega^{\omega}\cdot 3+\omega^{4}\cdot 4+7}\cdot 32.$$

Teorem 75. $\omega \leqslant \alpha$ *ve* β *limit ve* $n < \omega$ *ise*

$$\alpha^{\beta+n} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)\cdot\beta}\cdot\alpha^{n}.$$

Alıştırma 43. Teoremi kanıtlayın. *İpucu:* Önce $\alpha^\omega = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)\cdot\omega}$ denkliğini kanıtlayın.

Örneğin

$$\begin{aligned}
&(\omega^{\omega+1} + \omega^2 + 1)^{\omega^2+\omega\cdot 3+2} \\
&\qquad = \omega^{(\omega+1)\cdot(\omega^2+\omega\cdot 3)} \cdot (\omega^{\omega+1} + \omega^2 + 1)^2 \\
&\qquad = \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3} \cdot (\omega^{\omega+1} + \omega^2 + 1)^2 \\
&\qquad = \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3} \cdot (\omega^{\omega+1+\omega+1} + \omega^{\omega+1+2} + \omega^{\omega+1} + \omega^2 + 1) \\
&\qquad = \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3} \cdot (\omega^{\omega\cdot 2+1} + \omega^{\omega+3} + \omega^{\omega+1} + \omega^2 + 1) \\
&\qquad = \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1} + \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+3} \\
&\qquad\qquad + \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+1} + \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+2} + \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}.
\end{aligned}$$

5. Kardinaller

5.1. İyisıralanmış kümeler

Teorem 37'nin daha genel biçimi vardır:

Teorem 76. *Bir sınıf, bir kümeye gömülebilirse, bu sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 44. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 77. *Tüm a ile b kümeleri için $a \times b$ çarpımı, bir kümedir.*

Kanıt. Yerleştirme Aksiyomuna göre her c için $a \times \{c\}$ bir kümedir, dolayısıyla bir $\big\{a \times \{x\} \colon x \in b\big\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf da bir kümedir. Ayrıca

$$a \times b = \bigcup \big\{a \times \{x\} \colon x \in b\big\},$$

ve Bileşim Aksiyomuna göre bu bileşim, bir kümedir. □

Eğer bir a kümesi, bir $\boldsymbol{S}$ bağıntısı tarafından iyisıranırsa, o zaman $\boldsymbol{S} \cap (a \times a)$ bağıntısı da tarafından iyisıralanır, ve aslında a kümesinin tüm b ve c elemanları için

$$b \; \boldsymbol{S} \; c \Leftrightarrow b \; \big(\boldsymbol{S} \cap (a \times a)\big) \; c.$$

Son teoreme göre $\boldsymbol{S} \cap (a \times a)$ bir küme olduğundan $\big(a, \boldsymbol{S} \cap (a \times a)\big)$ sıralı ikilisi oluşturulabilir, ve bu sıralı ikilisine **iyisıralanmış küme** (*well ordered set*) denebilir. O halde $\big(a, \boldsymbol{S} \cap (a \times a)\big)$,

$$(a, \boldsymbol{S})$$

olarak yazılabilir. Mesela her α ordinali için $(\alpha, \in)$, iyisıralanmış bir kümedir. Aslında α, $(\alpha, \in)$ olarak düşünür. Genelde $(a, \boldsymbol{S})$ bir iyisıralanmış küme ve $\varnothing \subset c \subseteq a$ ise, o zaman $\boldsymbol{S}$ bağıntısina göre c kümesinin en küçük elemanı

$$\min_{\boldsymbol{S}}(c)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi $(a, \boldsymbol{S})$ ve $(b, \boldsymbol{T})$, iyisıralanmış küme olsun, ve $h\colon a \to b$ olsun. Eğer a kümesinin tüm c ve d elemanları için

$$c \mathrel{\boldsymbol{S}} d \Rightarrow h(c) \mathrel{\boldsymbol{T}} h(d)$$

ise, o zaman (Teorem 46'daki gibi) h, **kesin artandır** (*strictly increasing*). Bu durumda h, b kümesini örterse, o zaman h, $(a, \boldsymbol{S})$ iyisıralanmış kümesinden $(b, \boldsymbol{T})$ iyisıralanmış kümesine giden bir **eşyapı eşlemesi** [15] veya **izomorfizmdir** (*isomorphism*), ve

$$h\colon (a, \boldsymbol{S}) \xrightarrow{\cong} (b, \boldsymbol{T})$$

ifadesini yazabiliriz. $(a, \boldsymbol{S})$ iyisıralanmış kümesinden $(b, \boldsymbol{T})$ iyisıralanmış kümesine giden bir eşyapı eşlemesi varsa,

$$(a, \boldsymbol{S}) \cong (b, \boldsymbol{T})$$

ifadesini yazabiliriz.

Teorem 78. *$\cong$ bağıntısı, bir denklik sınıfıdır, ve*

$$h\colon (a, \boldsymbol{S}) \xrightarrow{\cong} (b, \boldsymbol{T}) \Rightarrow h^{-1}\colon (b, \boldsymbol{T}) \xrightarrow{\cong} (a, \boldsymbol{S}).$$

Alıştırma 45. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $(a, \boldsymbol{S}) \cong (b, \boldsymbol{T})$ ise, bu iki iyisıralanmış küme birbirine **eşyapısaldır** (*isomorphic*).

Teorem 79. $(a, \boldsymbol{S})$ *bir iyisıralanmış küme, b bir küme, $\boldsymbol{T}$ bir bağıntı, ve $f\colon a \to b$ olsun. Eğer a kümesinin tüm c ve d elemanları için*

$$c \ \boldsymbol{S} \ d \Leftrightarrow f(c) \ \boldsymbol{T} \ f(d)$$

ise, o zaman $(f[a], \boldsymbol{T})$ bir iyisıralanmış kümedir ve

$$f\colon (a, \boldsymbol{S}) \xrightarrow{\cong} (f[a], \boldsymbol{T}).$$

Alıştırma 46. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 80 (İyisıralanmış Özyineleme)**.** *Her $(a, <)$ iyisıralanmış kümesi için, bir ve tek bir α için,*

$$(a, <) \cong (\alpha, \in).$$

Ayrıca bir ve tek bir f için

$$f\colon (a, <) \xrightarrow{\cong} (\alpha, \in). \tag{$*$}$$

Aslında a kümesinin tüm b elemanı için

$$f(b) = \{f(x)\colon x \in a \wedge x < b\}. \tag{$\dagger$}$$

Kanıt. Eğer $(*)$ cümlesi doğru, $\{b, c\} \subseteq a$, ve $c < b$ ise, o zaman $f(c) \in f(b)$, dolayısıyla, f örten de olduğundan, $(\dagger)$ cümlesi de doğrudur.

Şimdi 68 numaralı Özyineleme Teoremindeki gibi a kümesinin her b elemanı için tanım kümesi $\{x \in a\colon x \leqslant b\}$ olan

$$c \in x \wedge c \leqslant b \Rightarrow f_b(c) = \{f_b(x)\colon x \in a \wedge x < c\}$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir f_b göndermesinin olduğunu göstereceğiz. O zaman a_0, istediğimiz özelliği olan a kümesinin b elemanlarının oluşturduğu küme olsun. Eğer $\{x \in a\colon x < b\} \subseteq a_0$ ise $\{c, d\} \subseteq a$ ve $d < c < b$ olduğu zaman

$$f_d \subseteq f_c.$$

Bu durumda $x \mapsto f_x(x)$, tanım kümesi $\{x \in a\colon x < b\}$ olan bir g_b göndermedir, ve

$$f_b = g_b \cup \{(b, \{f_x(x)\colon x \in a \wedge x < b\})\}$$

olabilir ve olmalıdır, dolayısıyla $b \in a_0$. Böylece $a \smallsetminus a_0$ farkının en küçük elemanı yoktur, dolayısıyla $a_0 = a$. Sonuç olarak f, tanım kümesi a olan $x \mapsto f_x(x)$ göndermesi olabilir ve olmalıdır. Ayrıca a kümesinin tüm b ve c elemanları için

$$c < b \Leftrightarrow f(c) \in f(b),$$

dolayısıyla, son teorem sayesinde, $(f[a], \in)$ bir iyisıralanmış kümedir ve

$$f\colon (a, <) \xrightarrow{\cong} (f[a], \in).$$

Ayrıca $b \in a$ ise $f(b) \subseteq f[a]$, ve sonuç olarak $f[a] \in \mathbf{ON}$. □

$(a, \boldsymbol{S})$, bir iyisıralanmış küme ise, ve $(a, \boldsymbol{S}) \cong (\alpha, \in)$ ise, o zaman α, $(a, \boldsymbol{S})$ ikilisinin **ordinalidir** (*α is the ordinal of* $(a, \boldsymbol{S})$), ve

$$\alpha = \operatorname{ord}(a, \boldsymbol{S})$$

ifadesini yazabiliriz. O halde

$$a \approx \operatorname{ord}(a, \boldsymbol{S}).$$

Özel olarak a kümesinin kardinali vardır (sayfa 16'ya bakın).

5.2. Sayılabilme

$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ama eşleme değilse, daha zayıf koşullar sağlayabilir. Eğer

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{B}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfını **örten** bir göndermedir ($\boldsymbol{F}$ *is onto* $\boldsymbol{B}$), ve

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazabiliriz. Eğer

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y) \Rightarrow x = y)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, **birebir** (*one-to-one*) veya **injektif** (*injective*) bir göndermedir; ayrıca $\boldsymbol{F}$, bir **gömmedir** (*embedding*). Bu durumda

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\preccurlyeq} \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazabiliriz.*

Teorem 81. *Bir gönderme bir eşlemedir ancak ve ancak birebir ve örtendir:*

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\approx} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\preccurlyeq} \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 47. Teoremi kanıtlayın.

Her *a kümesi* için, a kümesinden $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden gömmeler, ${}^{a}\boldsymbol{B}$ sınıfının bir alt sınıfını oluşturur; bu alt sınıf boş değilse,

$$a \preccurlyeq \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız.

Teorem 82. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \preccurlyeq a, \qquad a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c, \qquad a \approx b \Rightarrow a \preccurlyeq b$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 48. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 83. ω*, bir kardinaldir, yani*

$$\omega \in \mathbf{KN}.$$

* $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$ ifadesi de mümkündür.

Kanıt. Tümevarımla her m doğal sayısı için $f\colon m+1 \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega$ ise $f[m+1]$ kümesinin en büyük n elemanı vardır, dolayısıyla $n+1 \in \omega \smallsetminus f[m]$; özel olarak f, ω kümesini örten değildir. □

Teoremin sonucu olarak ω kümesiyle eşlenik her küme, sonsuzdur. Öyle bir küme, **sayılabilir sonsuzluktadır** (*countably infinite*). Sonlu veya sayılabilir sonsuzluktaki bir küme, **sayılabilir** (*countable*). Diğer kümeler ve sınıflar, **sayılamaz sonsuzluktadır** (*uncountably infinite*) veya **sayılamaz** (*uncountable*). O zaman küme olmayan her sınıf, sayılamaz.

Teorem 84. *Boş olmayan bir a kümesi için aşağıdaki koşullar, birbirine denktir.*

1. *a sayılabilir.*
2. *ω kümesinden a kümesini örten bir gönderme vardır.*
3. *$a \preccurlyeq \omega$.*

Kanıt. (1) ⇒ (2). a sayılabilir olsun. İki durum vardır.

- $f\colon a \xrightarrow{\approx} \omega$ ise $f^{-1}\colon \omega \twoheadrightarrow a$.
- $n \in \omega$ ve $f\colon a \xrightarrow{\approx} n$ ise, a kümesin her b elemanı için

$$f^{-1} \cup \{(x,b)\colon n \leqslant x < \omega\}\colon \omega \twoheadrightarrow a.$$

(2) ⇒ (3). $h\colon \omega \twoheadrightarrow a$ ise

$$x \mapsto \min\{y \in \omega\colon h(y) = x\}\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega.$$

(3) ⇒ (1). $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega$ olsun. O zaman $f\colon a \xrightarrow{\approx} f[a]$, ve $(f[a], \in)$ bir iyisıralanmış kümedir. Şimdi

$$\operatorname{ord}(f[a], \in) = \alpha$$

olsun. O zaman $a \approx f[a] \approx \alpha$. Biz $\alpha \leqslant \omega$ koşulunu kanıtlayacağız. Yani $\alpha \notin \omega$ ise $\alpha = \omega$ koşulunu kanıtlayacağız. Bunun için

$$g\colon (\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (f[a], \in)$$

olsun. Eğer $\alpha \notin \omega$ ise, o zaman $0 \leqslant g(0)$ ve

$$k \leqslant g(k) \Rightarrow k+1 \leqslant g(k)+1 \leqslant g(k+1),$$

dolayısıyla her m doğal sayısı için

$$m \leqslant g(m).$$

O zaman $g(\omega)$ tanımlanırsa $g(\omega) \geqslant m$, dolayısıyla $g(\omega) \geqslant \omega$, ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak $\alpha \leqslant \omega$. □

Eğer $a \preccurlyeq \boldsymbol{B}$ ama $a \not\approx \boldsymbol{B}$ ise

$$a \prec \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Sonuç olarak bir a kümesi sonludur ancak ve ancak $a \prec \omega$.

Şu anda sayılamaz sonsuzlukta hiçbir *küme* bilmiyoruz.

5.2.1. Toplama

Toplama veya ikili bileşim işlemiyle sayılamaz sonsuzluktaki kümelerın oluşturulamadığını göstereceğiz.

Tanım olarak, tüm a ile b kümeleri için

$$a \sqcup b = (a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\}).$$

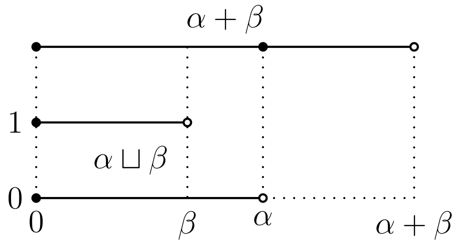
Bu bileşime, a ile b kümelerinin **ayrık bileşimi** (*disjoint union*) denir, çünkü $a \approx a \times \{0\}$, ve $b \approx b \times \{1\}$, ve $a \times \{0\}$ ve $b \times \{1\}$ çarpımları, birbirinden ayrıktır. Özel olarak

$$a \sqcup a = a \times 2.$$

Sonraki teorem için, Şekil 5'e bakın.

Teorem 85. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha + \beta \approx \alpha \sqcup \beta.$$



Şekil 5. $\alpha+\beta \approx \alpha \sqcup \beta$

Kanıt. $\boldsymbol{F}$, tanım sınıfı $\mathbf{V} \times 2$ olan $(\xi, y) \mapsto \alpha \cdot y+\xi$ göndermesi olsun. O zaman $\boldsymbol{F}(\xi, 0)=\xi$, dolayısıyla

$$\boldsymbol{F} \upharpoonright(\alpha \times\{0\})\colon \alpha \times\{0\} \xrightarrow{\approx} \alpha.$$

Ayrıca $\boldsymbol{F}(\xi, 1)=\alpha+\xi$, dolayısıyla, Teorem 49'u kullanarak,

$$\boldsymbol{F} \upharpoonright(\beta \times\{1\})\colon \beta \times\{1\} \xrightarrow{\approx}\{\zeta\colon \alpha \leqslant \zeta<\alpha \cdot \beta\}.$$

Sonuç olarak $\boldsymbol{F} \upharpoonright(\alpha \sqcup \beta)\colon \alpha \sqcup \beta \xrightarrow{\approx} \alpha+\beta$. □

Kanıtta $\boldsymbol{F} \upharpoonright(\alpha \sqcup \beta)$ göndermesinin tersi,

$$\Bigl\{\bigl(\xi,(\xi, 0)\bigr)\colon \xi<\alpha\Bigr\} \cup\Bigl\{\bigl(\xi,(\xi-\alpha, 1)\bigr)\colon \alpha \leqslant \xi<\alpha+\beta\Bigr\}.$$

Bu gönderme g olsun, ve $s=\Bigl\{\bigl(g(\xi), g(\eta)\bigr)\colon \xi<\eta<\alpha+\beta\Bigr\}$ olsun. O zaman $(\alpha \sqcup \beta, s)$, bir iyisıralanmış kümedir, ve

$$\operatorname{ord}(\alpha \sqcup \beta, s)=\alpha+\beta. \tag{‡}$$

Ayrıca $(\xi, y)\ s\ (\xi_1, y_1) \Leftrightarrow \Bigl(y<y_1 \vee(y=y_1 \wedge \xi<\xi_1)\Bigr)$. Özel olarak g eşlenmesini kullanmadan s tanımlanabilir. Onun için bazı kitaplarda $\alpha+\beta$ toplamı, (‡) eşitliğiyle tanımlanır.

Teorem 86. *$a \approx b$ ve $c \approx d$ ise $a \sqcup c \approx b \sqcup d$.*

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...

Şekil 6. $\omega \sqcup \omega \approx \omega$

Alıştırma 49. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 87. $\omega \sqcup \omega \approx \omega$.

Kanıt. $(x, y) \mapsto 2x + y \colon \omega \sqcup \omega \xrightarrow{\approx} \omega$. (Şekil 6'ya bakın.) □

Sonuç olarak

$$\omega + \omega \approx \omega,$$

ve daha genelde α ve β sayılabilirse $\alpha + \beta \preccurlyeq \omega$.

Teorem 88. *a ile b sayılabilirse $a \cup b$ bileşimi de sayılabilir.*

Alıştırma 50. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 89. *0 olmayan her n doğal sayısı için $\omega \cdot n \approx \omega$.*

Kanıt. Tümevarım yöntemini kullanacağız.

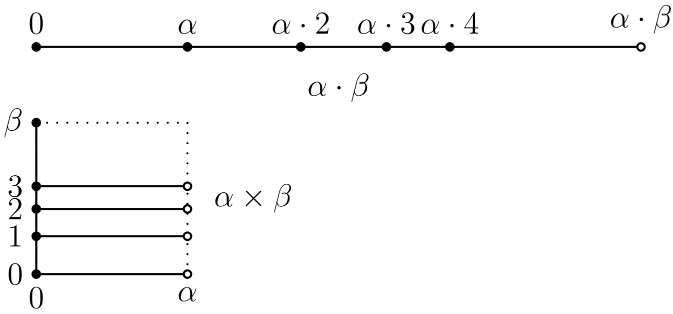
1. $\omega \cdot 1 = \omega$.
2. $\omega \cdot m \approx \omega$ ise

$$\begin{aligned} \omega \cdot (m+1) &= \omega \cdot m + \omega && \text{[tanım]} \\ &\approx \omega \cdot m \sqcup \omega && \text{[Teorem 85]} \\ &\approx \omega \sqcup \omega && \text{[hipotez ve Teorem 86]} \\ &\approx \omega. && \text{[Teorem 87]} \end{aligned}$$ □

Benzer (ama daha karmaşık) şekilde $\omega \times n \approx \omega$ eşlenikliği kanıtlanabilir; ama bu sonuç, sonraki teoremden de çıkar.

Teorem 90. *Tüm α ordinali ve n doğal sayısı için*

$$\alpha \times n \approx \alpha \cdot n.$$



Şekil 7. $\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta$

Kanıt. Tümevarım yöntemini kullanacağız.

1. $\alpha \times 0 = \varnothing = 0 = \alpha \cdot 0$.
2. $\alpha \times m \approx \alpha \cdot m$ ise

$$\begin{aligned}\alpha \times (m+1) &= (\alpha \times m) \cup (\alpha \times \{m\}) \\ &\approx \big((\alpha \times m) \times \{0\}\big) \cup (\alpha \times \{1\}) \\ &= (\alpha \times m) \sqcup \alpha \\ &\approx \alpha \cdot m + \alpha \\ &= \alpha \cdot (m+1).\end{aligned}$$ □

5.2.2. Çarpma

Çarpmayla sayılamaz sonsuzluktaki kümeler oluşturulamaz. Sonraki teorem için, Şekil 7'ye bakın.

Teorem 91. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta.$$

Kanıt. Bölme Teoremine (yani Teorem 64'e) göre

$$(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi \colon \alpha \times \mathbf{V} \xrightarrow{\approx} \mathbf{V}.$$

Ayrıca $\gamma \in \alpha$ ise $\alpha \cdot \delta + \gamma < \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \delta < \beta$. Sonuç olan

$$(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi \colon \alpha \times \beta \xrightarrow{\approx} \alpha \cdot \beta.$$ □

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & \vdots \\
1 & 3 & 7 & 13 & 21 & 31 & \vdots \\
4 & 5 & 8 & 14 & 22 & 32 & \vdots \\
9 & 10 & 11 & 15 & 23 & 33 & \vdots \\
16 & 17 & 18 & 19 & 24 & 34 & \vdots \\
25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 35 & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots
\end{array}
$$

Şekil 8. $\omega \cdot \omega \approx \omega$

Alıştırma 51. Tanım sınıfı $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ olarak $(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi$ göndermesinin birebir olmadığını gösterin.

Teorem 92. *$\omega \times \omega \approx \omega$.*

Kanıt. $f = \bigl\{\bigl((\xi, \eta), \zeta\bigr) \in (\omega \times \omega) \times \omega\colon$

$$(\xi > \eta \Rightarrow \zeta = \xi^2 + \eta) \land (\xi \leqslant \eta \Rightarrow \zeta = \eta^2 + \xi + \eta)\bigr\}$$

olsun. (Şekil 8'e bakın.) O zaman $f\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$. □

Sonuç olarak $\omega \cdot \omega \approx \omega$.

Teorem 93. *$a \approx b$ ve $c \approx d$ ise $a \times c \approx b \times d$.*

Kanıt. $f\colon a \xrightarrow{\approx} b$ ve $g\colon c \xrightarrow{\approx} d$ ise

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))\colon a \times c \xrightarrow{\approx} b \times d.$$ □

Kanıttaki eşleme,

$$\Bigl\{\Bigl(\bigl(x, f(x)\bigr), \bigl(y, g(y)\bigr)\Bigr)\colon x \in a \land y \in b\Bigr\}$$

kümesidir. Gönderme olarak $f \times g$ biçiminde yazılabilir. Öyle bir ifade, Teorem 98'in kanıtında kullanılacaktır.

Teorem 94. *a ile b sayılabilirse $a \times b$ çarpımı da sayılabilir.*

Alıştırma 52. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç olarak α ve β sayılabilirse $\alpha \cdot \beta \preccurlyeq \omega$.

Teorem 95. 0 *olmayan her n doğal sayısı için ω^n ordinal kuvveti sayılabilir sonsuzluktadır, yani*

$$\omega^n \approx \omega.$$

Kanıt. Tümevarım yöntemini kullanacağız.

1. Tanımdan $\omega^1 = \omega$.
2. $\omega^m \approx \omega$ ise

$$\begin{aligned}
\omega^{m+1} &= \omega^m \cdot \omega && \text{[tanım]}\\
&\approx \omega^m \times \omega && \text{[Teorem 91]}\\
&\approx \omega \times \omega && \text{[hipotez ve Teorem 93]}\\
&\approx \omega. && \text{[Teorem 92]}
\end{aligned}$$
□

Son alt bölümdeki gibi, benzer şekilde $\omega \approx {}^n\omega$ eşlenliği kanıtlanabilir. Özel olarak ${}^n\omega$, bir kümedir. Bu sonuçlar, sonraki teoremden de çıkar.

Teorem 96. *Tüm α ordinali ve n doğal sayısı için*

$$\alpha^n \approx {}^n\alpha.$$

Kanıt. ${}^00 = \{\varnothing\} = 1 = 0^0$ ve ${}^{n+1}0 = \varnothing = 0 = 0^{n+1}$. Şimdi $\alpha > 0$ olsun.

1. ${}^0\alpha = \{\varnothing\} = 1 = \alpha^0$.
2. $f_m \colon {}^m\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha^m$ olsun. Eğer $g \in {}^{m+1}\alpha$ ise

$$f_{m+1}(g) = \alpha \cdot f_m(g \upharpoonright m) + g(m)$$

olsun. O zaman $f_{m+1} \colon {}^{m+1}\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha^{m+1}$. □

Kanıtta bulduğumuz ${}^n\alpha$ ile α^n arasında eşleme,

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto \alpha^{n-1} \cdot x_0 + \alpha^{n-2} \cdot x_1 + \dots + \alpha \cdot x_{n-2} + x_{n-1}.$$

Teorem 92'nin yardımıyla sonraki teorem kendisini kanıtlar.

Teorem 97. *Eğer a sayılabilir, ve her elemanı da sayılabilir ise, ve ayrıca $f\colon \omega \twoheadrightarrow a$, ve her n doğal sayısı için*

$$g_n\colon \omega \twoheadrightarrow f(n)$$

ise, o zaman $\bigcup a = \{g_x(y)\colon (x, y) \in \omega \times \omega\}$, dolayısıyla

$$\bigcup a$$

bileşimi de sayılabilir.

Örnekler sonraki alt bölümdedir. Kısaca, elemanları sayılabilir olan sayılabilir bir a kümesinin bilişimi de sayılabilir; ama a kümesinin her elemanı, tanım kümesi ω olan bilinen bir gönderme tarafından örtülmelidir. Yani $\boldsymbol{A}$, tüm sayılabilir kümeler sınıfı olsun; o zaman

$$\forall x\ \Bigl(x \in \boldsymbol{A} \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A}) \Rightarrow \bigcup x \in \boldsymbol{A}\Bigr)$$

cümlesini kanıtlamış *olmadık.* Bu cümlenin doğruluğu için Seçim Aksiyomu gerekir.

5.2.3. Kuvvet alma

Ordinal kuvvetleri alarak sayılamaz sonsuzluktaki kümeler oluşturulamaz.

Teorem 98. $\omega^\omega \approx \omega$.

$$\omega \xrightarrow{\quad f^{-1} \quad} \omega \times \omega \xrightarrow{h\times(x\mapsto x)} \omega^k \times \omega \xrightarrow{\quad g_k \quad} \omega^{k+1}$$

Şekil 9. $\omega^{k+1} \approx \omega$

Kanıt. $\omega^\omega = \bigcup_{k<\omega} \omega^k$. Teorem 92'nin kanıtındaki gibi

$$f\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$$

olsun. Her k doğal sayısı için

$$g_k = \big((\xi, \eta) \mapsto \omega^k \cdot \eta + \xi\big) \restriction (\omega^k \times \omega)$$

olsun; o zaman Teorem 91'in kanıtındaki gibi

$$g_k\colon \omega^k \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega^{k+1}.$$

Bu durumda $h\colon \omega \xrightarrow{\approx} \omega^k$ ise

$$g_k \circ \big(h \times (x \mapsto x)\big) \circ f^{-1}\colon \omega \xrightarrow{\approx} \omega^{k+1}.$$

(Şekil 9'a bakın.) Özyineleme ile öyle $m \mapsto f_m$ göndermesi vardır ki

$$f_0 = (x \mapsto 0) \restriction \omega, \quad f_1 = (x \mapsto x) \restriction \omega, \quad f_{k+1}\colon \omega \xrightarrow{\approx} \omega^{k+1}.$$

O zaman Teorem 97 sayesinde $\bigcup_{k<\omega} \omega^k$ bileşimi sayılabilir. $\square$

ω^ω gibi ${}^\omega\omega$ sayılabilir mi? Daha genelde $\alpha^\omega \approx {}^\omega\alpha$? Teorem 96'da bulduğumuz ${}^n\alpha$ ile α^n arasında eşleniği kullanarak ${}^\omega\alpha$ sınıfından α^ω kümesine giden bir eşleme tanımlayamayız. Teorem 105'e bakın.

Tüm α ile β ordinalleri için, tanım kümeleri β ordinalinin sonlu bir altkümesi olan ve değer kümeleri $\alpha \smallsetminus \{0\}$ farkının bir altkümesi olan göndermelerin sınıfı, $\exp(\alpha, \beta)$ olsun.* Yani

$$\exp(\alpha, \beta) = \Big\{f\colon \exists x \ \big(x \subseteq \beta \land x \prec \omega \land f\colon x \to \alpha \smallsetminus \{0\}\big)\Big\}$$

olsun.

*$\exp(\alpha, \beta)$ ifadesi, ve aşağıdaki Teorem 99, Levy'nin [13, IV.2.10] kitabından alınmıştır.

Teorem 99. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha^\beta \approx \exp(\alpha, \beta).$$

Kanıt. $\exp(\alpha, \beta)$ sınıfının her elemanı,

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_{n-1}$$

koşulunu sağlayan $\{(\gamma_0, \delta_0), \ldots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$\boldsymbol{F}\big(\{(\gamma_0, \delta_0), \ldots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\}\big) = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{n-1}} \cdot \delta_{n-1}$$

olsun. O halde

$$\boldsymbol{F}\colon \exp(\alpha, \beta) \xrightarrow{\approx} \alpha^\beta;$$

aslında Teorem 69'a göre $\boldsymbol{F}^{-1}$, $\xi \mapsto \xi_\alpha$ göndermesidir. □

Teorem 100. *$\alpha \approx \beta$ ve $\gamma \approx \delta$ ise* $\exp(\alpha, \gamma) \approx \exp(\beta, \delta)$*.*

Alıştırma 53. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç olarak α ve β sayılabilirse $\alpha^\beta \preccurlyeq \omega$.

5.3. Büyüklüklerin sıralanması

Teorem 82'nin özel durumu vardır:

$$a \prec b \land b \prec c \Rightarrow a \preccurlyeq c.$$

Ama $a \prec b \land b \prec c$ ise $a \prec c$ sonucuna varabilir miyiz? Yani $\prec$ bağıntısı bir sıralama mıdır?

Sayfa 16 ve 119'daki Seçim Aksiyomuna göre her küme iyisıralanabilir, dolayısıyla her büyüklük, bir ve tek bir kardinal içerir, ve sonuç olarak büyüklükler, içerilen kardinallere göre iyisıralanabilir. Özel olarak $\prec$ bağıntısı bir sıralamadır. Aslında, Seçim Aksiyomunun yerinde Teorem 102 kullanarak, büyüklüklerin sıralanabildiğini göstereceğiz.

Teorem 101 (Schröder–Bernstein). *Tüm a ve b kümeleri için*

$$a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Kanıt. $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} b$ ve $g\colon b \xrightarrow{\preccurlyeq} a$ olsun. Özyinelemeyle

$$(a_0, b_0) = (a, b), \qquad (a_{n+1}, b_{n+1}) = (g[b_n], f[a_n])$$

olsun. O zaman

$$a_0 \supseteq a_1 \supseteq \cdots, \qquad b_0 \supseteq b_1 \supseteq \cdots$$

Ayrıca

$$f \restriction (a_{2n} \smallsetminus a_{2n+1})\colon a_{2n} \smallsetminus a_{2n+1} \xrightarrow{\approx} b_{2n+1} \smallsetminus b_{2n+2},$$
$$g^{-1} \restriction (a_{2n+1} \smallsetminus a_{2n+2})\colon a_{2n+1} \smallsetminus a_{2n+2} \xrightarrow{\approx} b_{2n} \smallsetminus b_{2n+1}.$$

O zaman

$$f \restriction \left(\bigcup_{n\in\omega}(a_{2n} \smallsetminus a_{2n+1}) \cup \bigcap_{n\in\omega} a_n\right) \cup g^{-1} \restriction \bigcup_{n\in\omega}(a_{2n+1} \smallsetminus a_{2n+2}),$$

a kümesinden b kümesine giden bir eşlemedir. □

Schröder–Bernstein Teoremi için Zermelo, Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmayan bir kanıtı verdi. Sayfa 127'ye bakın.

Teorem 102. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \prec b \land b \prec c \Rightarrow a \prec c.$$

Alıştırma 54. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi büyüklükler, $\prec$ bağıntısına göre sıralanabilir; ama Seçim Aksiyomunu kullanmadan bu sıralamanın doğrusal olup olmadığını bilmiyoruz.

5.4. Sayılamaz sonsuzluk

Bazı **sonsuz büyüklükler** (yani elemanı sonsuz olan büyüklükler), başka sonsuz büyüklüklerden daha büyüktür.

Teorem 103 (Cantor)**.** *Her a kümesi için*

$$a \prec \mathscr{P}(a).$$

Kanıt. $\big\{\big(x,\{x\}\big)\colon x \in a\big\}$ göndermesinin sayesinde $a \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$. Şimdi $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(a)$ ve

$$b = \{x \in a\colon x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman a kümesinin her c elemanı için

$$c \in b \Leftrightarrow c \notin f(c).$$

Öyleyse $b \neq f(c)$. Dolayısıyla $b \notin f[a]$, ve f, eşleme değildir. Sonuç olarak $a \not\approx \mathscr{P}(a)$. □

Şimdi sayfa 104'te sorduğumuz soruyu cevaplayacağız.

Teorem 104. *Her a kümesi için*

$$x \mapsto \{(y,0)\colon y \in a \smallsetminus x\} \cup \{(y,1)\colon y \in x\}\colon \mathscr{P}(a) \xrightarrow{\approx} {}^{a}2.$$

Alıştırma 55*.* Teoremi kanıtlayın.

Teorem 105. $\omega^\omega \prec {}^\omega\omega$.

Kanıt. Teorem 98 ve Cantor'un Teoremi ile

$$\omega^\omega \approx \omega \prec \mathscr{P}(\omega).$$

Teorem 104 ile, ${}^\omega 2 \subseteq {}^\omega\omega$ olduğundan, bir $\boldsymbol{F}$ için

$$\boldsymbol{F}\colon \mathscr{P}(\omega) \xrightarrow{\preccurlyeq} {}^\omega\omega.$$ □

Sonuç olarak $\omega^\omega \prec {}^\omega\omega$.

Cantor'un Teoremi, küme olmayan sınıflar için yanlıştır. Mesela

$$\mathbf{V} = \mathscr{P}(\mathbf{V}).$$

Alıştırma 56. Cantor'un Teoremini kanıtlarken a kümesinin küme olduğunu nasıl kullandık?

Teorem 96 ve 104 sayesinde a sonlu ise $\mathscr{P}(a)$ kuvvet sınıfı da, sonlu bir kümedir. O zaman bir b kümesi için $\mathscr{P}(b)$ sonsuz ise, b kümesi de sonsuzdur, dolayısıyla, Cantor'un Teoremi sayesinde, $\mathscr{P}(b)$ kuvvet sınıfı sayılamaz.

AKSİYOM 8 (Kuvvet Kümesi). *Her kümenin kuvvet sınıfı bir kümedir, yani*

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \Leftrightarrow \forall w\, (w \in z \Rightarrow w \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Özel olarak sayılamaz kümeler vardır, mesela $\mathscr{P}(\omega)$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))$, ve saire. Böylece en büyük küme yoktur. Ama (Seçim Aksiyomunu kullanmadan) bu kuvvet kümelerinin kardinallerinin olup olmadığını bilmiyoruz. Aşağıdaki Hartogs'un Teoremi ile, daha küçük olmayan kardinaller olacaktır.

Sonraki teoremler için

$$\mathscr{P}^0(a) = a, \qquad \mathscr{P}^{n+1}(a) = \mathscr{P}(\mathscr{P}^n(a))$$

özyineli tanımını yaparız.

Teorem 106. *Tüm a ve b için $a \times b \subseteq \mathscr{P}^2(a \cup b)$.*

Alıştırma 57. Teoremi kanıtlayın.

Sonraki teorem, Teorem 122 için kullanılacaktır.

Teorem 107 (Hartogs). *Her a kümesi için, bir β ordinali için,*

$$\beta \not\preccurlyeq a, \qquad \beta \preccurlyeq \mathscr{P}^4(a).$$

Kanıt. $\boldsymbol{B} = \{\xi\colon \xi \preccurlyeq a\}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{B}$ geçişlidir, dolayısıya $\boldsymbol{B}$ bir küme ise, bir β ordinalidir. Bu durumda $\beta \notin \beta$ olduğundan

$$\beta \not\preccurlyeq a.$$

Neden $\boldsymbol{B}$ bir küme olmalıdır? $\mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a \times a)$ çarpımının

$$(c, s) \in b \Leftrightarrow (s \text{ bağıntısı, } c \text{ kümesini iyisıralar})$$

koşulunu sağlayan b altkümesi vardır. O zaman

$$\boldsymbol{B} = \{\operatorname{ord}(c, s)\colon (c, s) \in b\} = \beta.$$

Ayrıca

$$\alpha \mapsto \Big\{s \cup \big\{(x, x)\colon x \in c\big\}\colon (c, s) \in b \wedge s \subseteq c \times c \wedge \alpha = \operatorname{ord}(c, s)\Big\}\colon \beta \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}^4(a). \quad \square$$

Şu andan itibaren

$$\kappa, \qquad \lambda, \qquad \mu, \qquad \nu$$

küçük Yunan harfleri, her zaman kardinalleri gösterecektir.

Şimdi her κ kardinali için, bu kardinale gömülemeyen *en küçük* ordinal vardır. Bu ordinal, bir kardinal olmalıdır. Bu kardinale, κ kardinalinin **ardılı** (veya *kardinal ardılı*) denir, ve bu ardıl

$$\kappa^+$$

ifadesiyle gösterilir. Böylece $\kappa < \kappa^+$, ve her λ kardinali için ya $\lambda \leqslant \kappa$ ya da $\kappa^+ \leqslant \lambda$.

κ sonsuz ise κ^+ ordinal olarak ardıl değildir:

Teorem 108. *Her sonsuz kardinal, ordinal olarak bir limittir.*

Alıştırma 58. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 109. *Elemanları kardinal olan bir kümenin supremumu, bir kardinaldir.*

Alıştırma 59. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi

$$\begin{gathered}\aleph_0 = \omega,\\ \aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+,\\ \gamma \text{ limit} \Rightarrow \aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\xi \colon \xi < \gamma\}\end{gathered}$$

koşulları, **ON** sınıfında bir $\xi \mapsto \aleph_\xi$ işlemini tanımlar. (Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 110. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ göndermesi, $\mathbf{KN} \smallsetminus \omega$ sınıfını örten, normal bir işlemdir.*

Alıştırma 60. Teoremi kanıtlayın.

5.5. Toplama ve çarpma

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{kard}(\kappa + \lambda), \qquad \kappa \otimes \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \cdot \lambda).$$

O zaman Teorem 85 ve 91 sayesinde

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \sqcup \lambda), \qquad \kappa \otimes \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \times \lambda).$$

Sonraki teoremler sayesinde kardinal hesapmaları kolaydır.

Teorem 111. *Tüm κ ile λ kardinalleri için*

$$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa, \qquad \kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa.$$

Alıştırma 61. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 112. $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ *ise*

$$\lambda \leqslant \kappa \oplus \lambda \leqslant \kappa \otimes \lambda \leqslant \lambda \otimes \lambda.$$

Alıştırma 62. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 113. $\boldsymbol{F}$, *ordinallerde normal bir işlem, ve*

$$\alpha \approx \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \approx \boldsymbol{F}(\beta) \tag{§}$$

ise, o zaman tüm sonsuz κ *kardinali için*

$$\boldsymbol{F}(\kappa) = \kappa.$$

Kanıt. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan, Teorem 56 sayesinde $\kappa \leqslant \boldsymbol{F}(\kappa)$. Mümkünse $\kappa < \boldsymbol{F}(\kappa)$ olsun. Teorem 109 sayesinde κ bir ordinal limiti olduğundan ve $\boldsymbol{F}$ normal olduğundan bir α için

$$\alpha < \kappa < \boldsymbol{F}(\alpha).$$

O halde $\lambda = \operatorname{kard}(\alpha)$ ise, (§) satırındaki koşula göre

$$\lambda < \kappa \leqslant \boldsymbol{F}(\lambda).$$

Böylece $\{\xi : \xi \in \mathbf{KN} \wedge \xi < \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur, dolayısıyla sınıf boştur. □

ON sınıfının bir a altkümesinin en büyük elemanı varsa

$$\operatorname{maks} a$$

olarak yazılabilir.

Teorem 114. λ *sonsuz ise* $\lambda = \lambda \otimes \lambda$.

Kanıt. $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ çarpımı,

$$\text{maks}\{\alpha, \beta\} < \gamma \Leftrightarrow (\alpha, \beta) < (\gamma, 0)$$

koşulunu sağlayan bir $<$ bağıntısı tarafından iyisıralanır, ve bu durumda

$$\alpha \times \alpha = \big\{(\xi, \eta) \colon (\xi, \eta) < (\alpha, 0)\big\}.$$

Örneğin

$$\left.\begin{aligned}(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta) \Leftrightarrow{} & \text{maks}\{\alpha, \beta\} < \text{maks}\{\gamma, \delta\} \\ & \vee \beta < \delta < \gamma = \alpha \\ & \vee (\beta < \alpha = \delta \wedge \gamma \leqslant \delta) \\ & \vee \alpha < \gamma \leqslant \delta = \beta\end{aligned}\right\} \tag{¶}$$

olabilir. O zaman sayfa 93'teki Teorem 80'e göre, $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ çarpımından $\mathbf{ON}$ sınıfına giden

$$\boldsymbol{G}(\alpha, \beta) = \{\boldsymbol{G}(\xi, \eta) \colon (\xi, \eta) < (\alpha, \beta)\}$$

koşulunu sağlayan bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır, ve bu durumda

$$\boldsymbol{G}(\alpha, \beta) = \text{ord}\Big(\big\{(\xi, \eta) \colon (\xi, \eta) < (\alpha, \beta)\big\}, <\Big).$$

Mesela (¶) satırındaki koşulları altında $\boldsymbol{G}$ göndermesinin değerleri, Şekil 10'daki gibidir. (Sayfa 101'deki Şekil 8 ile karşılaştırın.) Şimdi

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\alpha, 0)$$

olsun. O zaman $\boldsymbol{F}(\alpha) \approx \alpha \times \alpha$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\alpha \approx \beta &\Rightarrow \alpha \times \alpha \approx \beta \times \beta && \text{[Teorem 93]} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \approx \boldsymbol{F}(\beta).\end{aligned}$$

	0	1	2	3	β	γ
0	0	2	6			$\delta+\gamma$
1	1	3	7			$\delta+\gamma'$
2	4	5	8			$\delta+\gamma''$
3	9					$\vdots$
α					$\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)$	
γ	δ	δ'				$\delta+\gamma\cdot 2$
γ'	$\delta+(\gamma\cdot 2)'$					

Şekil 10. $\lambda=\lambda\otimes\lambda$

Ayrıca $\boldsymbol{F}$ kesin artandır. Son olarak α limit ise

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\alpha)&=\{\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\colon\ \mathrm{maks}(\xi,\eta)<\alpha\}\\&=\bigcup_{\zeta<\alpha}\{\boldsymbol{G}(\xi,\eta)\colon\ \mathrm{maks}(\xi,\eta)<\zeta\}\\&=\sup_{\zeta<\alpha}\boldsymbol{F}(\zeta).\end{aligned}$$

Böylece $\boldsymbol{F}$ normaldir, ve son teoreme göre κ sonsuz ise $\boldsymbol{F}(\kappa)=\kappa$, dolayısıyla

$$\kappa=\kappa\otimes\kappa.$$ □

Teorem 115. *Tüm α ve β için*

$$\aleph_\beta\oplus\aleph_\gamma=\aleph_\beta\otimes\aleph_\gamma=\aleph_{\mathrm{maks}\{\alpha,\beta\}}.$$

Kanıt. Teorem 112 ve 114. □

5.6. Ordinaller Kuvvetlerinin kardinalleri

Herhangi bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}_\omega(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$ sınıfının *sonlu* altkümelerinin sınıfı olsun.

Teorem 116. *α sonsuz ise*

$$\mathscr{P}_\omega(\alpha) \approx \alpha^\omega \approx \alpha.$$

Kanıt. Eğer $\omega \leqslant \alpha$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha &\preccurlyeq \alpha^\omega \\ &\approx \exp(\alpha, \omega) && \text{[Teorem 99]} \\ &\subseteq \mathscr{P}_\omega(\omega \times \alpha) \\ &\approx \mathscr{P}_\omega(\alpha) && \text{[Teorem 115].} \end{aligned}$$

Ayrıca $b \in \mathscr{P}_\omega(\alpha)$ ise, Teorem 80'e göre, bir ve tek bir f için

$$f \colon \big(\mathrm{kard}(b), \in\big) \xrightarrow{\cong} (b, \in).$$

Özel olarak $f \in {}^{\mathrm{kard}(b)}\alpha$. Böylece

$$\mathscr{P}_\omega(\alpha) \preccurlyeq \bigcup_{n \in \omega} {}^n\alpha.$$

Özyineleme ile, tanım kümesi ω olan,

$$g_0 \colon {}^0\alpha \xrightarrow{\preccurlyeq} \alpha, \qquad\qquad g_{n+1} \colon {}^{n+1}\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha$$

koşullarını sağlayan bir $n \mapsto g_n$ göndermesi vardır. Aslında

$$g_0(0) = 0, \qquad g_1(f) = f(0), \qquad h \colon \alpha \times \alpha \xrightarrow{\approx} \alpha$$

olsun. Eğer $g_n \colon {}^n\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha$ ise, o zaman

$$g_{n+1}(f) = h\big(g_n(f \restriction n), f(n)\big)$$

olsun. Şimdi

$$f \mapsto \big(\mathrm{kard}(f), g_{\mathrm{kard}(f)}(f)\big) \colon \bigcup_{n \in \omega} {}^n\alpha \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega \times \alpha.$$

Son olarak tekrar $\omega \times \alpha \approx \alpha$. □

Teorem 117. *α ile β sonsuz ise*

$$\alpha^\beta \approx \text{maks}\{\alpha, \beta\}.$$

Kanıt. İlk olarak

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha^1 &\leqslant \alpha^\beta, && \text{[Teorem 65]} \\ \beta &\leqslant \alpha^\beta. && \text{[Teorem 65 ve 56]} \end{aligned}$$

Eğer $\{(\gamma_0, \delta_0), \ldots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\} \in \exp(\alpha, \beta)$ ve $\gamma_0 < \cdots < \gamma_{n-1}$ ise, o zaman

$$f\Big(\big\{(\gamma_0, \delta_0), \ldots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\big\}\Big) = \big(\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}, (\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})\big)$$

olsun. O halde $f\colon \exp(\alpha, \beta) \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}_\omega(\beta) \times \exp(\alpha, \omega)$, dolayısıyla

$$\alpha^\beta \approx \exp(\alpha, \beta) \preccurlyeq \mathscr{P}_\omega(\beta) \times \exp(\alpha, \omega) \approx \beta \times \alpha \approx \text{maks}\{\alpha, \beta\}. \ \square$$

5.7. Kontinü Hipotezi

Cantor'un Teoreminden

$$\aleph_0 = \omega \prec \mathscr{P}(\omega).$$

Kontinü Hipotezine (*Continuum Hypothesis*) göre, $\mathscr{P}(\omega)$ kümesi iyisıralanabilir ve ayrıca

$$\mathscr{P}(\omega) \approx \aleph_1.$$

Bu bir aksiyom değil, sadece bir cümledir. Bu cümleye KH denir.

Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi (*Generalized Continuum Hypothesis*) veya GKH,

$$\forall x \, \forall y \, (\omega \preccurlyeq x \prec y \preccurlyeq \mathscr{P}(x) \Rightarrow y \approx \mathscr{P}(x))$$

cümlesidir. Şimdilik GKH $\Rightarrow$ KH gerektirmesinin doğruluğu, apaçık değildir; ama bu doğruluğu göstereceğiz.

Ondan önce $\mathscr{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$ eşlenikliğini göstereceğiz.

$$\mathbb{N} = \{x \in \omega \colon x \geqslant 1\}$$

olsun, ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çarpımında $\sim$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

koşulunu sağlayan ikili bağıntı olsun.

Teorem 118. $\sim$ *bir denklik bağıntısıdır.*

Alıştırma 63. Teoremi kanıtlayın.

O zaman $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise

$$a/b = \frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon (x, y) \sim (a, b)\}$$

olsun, ve

$$\mathbb{Q}^+ = \{x/y \colon (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}, \qquad \mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^+ \sqcup \mathbb{Q}^+) \cup \{0\}$$

olsun. $\mathbb{Q}$ kümesinin elemanları, **kesirli sayılar** (*rational numbers*) olarak anlaşılabilir.

Teorem 119. $\mathbb{Q} \approx \omega$.

Alıştırma 64. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 120. $x \mapsto x/1 \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathbb{Q}^+$. *Ayrıca* $\mathbb{Q}^+$ *kümesinde*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

ve

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

tanımları yapılabilir. O zaman $<$, $\mathbb{Q}^+$ *kümesinin doğrusal sıralamasıdır, ve* $a < b$ *ise*

$$a < \frac{2a + b}{3} < \frac{a + 2b}{3} < b.$$

Alıştırma 65. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $\mathbb{R}^+$,

$$0 \subset a \subset \mathbb{Q}^+,$$
$$x < y \land y \in a \Rightarrow x \in a,$$
$$y \in a \Rightarrow \exists z\ (y < z \land z \in a)$$

koşullarını sağlayan a kümelerinin kümesi olsun, ve

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}^+ \sqcup \mathbb{R}^+) \cup \{0\}$$

olsun. $\mathbb{R}$ kümesinin elemanları, **gerçel sayılar** (*real numbers*) olarak anlaşılabilir. Ayrıca $\mathbb{R}$ kümesine **kontinü** (*continuum*) denebilir.

Teorem 121. $\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega)$.

Kanıt. $n \in \omega$ ve $\sigma \in {}^n2$ ise

$$f(\sigma) = 1 + \sum_{\xi<n} \frac{2\sigma(\xi)}{3^\xi}$$

olsun. Yani özyinelemeyi kullanarak $f(0) = 1$ olsun, ve $\sigma \in {}^m2$ ise

$$f\Big(\sigma \cup \big\{(m,0)\big\}\Big) = f(\sigma), \quad f\Big(\sigma \cup \big\{(m,1)\big\}\Big) = f(\sigma) + 2/3^m$$

olsun. Şimdi $\sigma \in {}^\omega2$ ise

$$g(\sigma) = \Big\{x \in \mathbb{Q}^+ \colon \exists\eta\ \big(\eta < \omega \land x < f(\sigma \restriction \eta)\big)\Big\}$$

olsun. O zaman $g\colon {}^\omega2 \to \mathbb{R}^+$. Aslında g bir gömmedir, çünkü $\sigma \restriction n = \tau \restriction n$ ama $\sigma(n) = 0$ ve $\tau(n) = 1$ ise, o zaman

$$f(\sigma) + 1/3^n \in g(\tau) \smallsetminus g(\sigma).$$

Ayrıca $\mathbb{Q}^+ \approx \omega$ ve $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q}^+)$, dolayısıyla

$${}^\omega2 \preccurlyeq \mathbb{R}^+ \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}^+) \approx \mathscr{P}(\omega) \approx {}^\omega2.$$

Schröder–Bernstein Teoremine göre ${}^\omega2 \approx \mathbb{R}^+$. $\square$

Teorem 122. GKH *doğruysa, her küme iyisıralanabilir.*

Kanıt. Her a kümesi, $\mathscr{P}(a \sqcup \omega)$ kümesine gömülebilir, çünkü

$$x \mapsto \{(x,0)\} \colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(a \sqcup \omega).$$

Bu nedenle $\mathscr{P}(a \sqcup \omega)$ iyisıralanabilirse, a kümesi de iyisıralanabilir.
Genelde $c \subseteq b$ ve $\operatorname{kard}(b \smallsetminus c) = 1$ ise

$$\mathscr{P}(b) \approx \mathscr{P}(c) \sqcup \mathscr{P}(c).$$

Ayrıca $a \sqcup \omega \approx a \sqcup \omega'$, dolayısıyla

$$\mathscr{P}(a \sqcup \omega) \approx \mathscr{P}(a \sqcup \omega') \approx \mathscr{P}(a \sqcup \omega) \sqcup \mathscr{P}(a \sqcup \omega).$$

O zaman dediğimize göre, a kümesini iyisıralamak için, $a \approx a \sqcup a$ eşlenikliğini varsayabiliriz. Özel olarak a kümesi sonsuzdur. O zaman Schröder–Bernstein Teoremi ve tümevarımdan, her n doğal sayısı için

$$\mathscr{P}^n(a) \approx \mathscr{P}^n(a) \sqcup \mathscr{P}^n(a), \qquad \mathscr{P}^n(a) \approx \mathscr{P}^n(a) \sqcup \{0\}.$$

Şimdi $b \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$ olsun. O zaman

$$a \preccurlyeq b \sqcup a \preccurlyeq \mathscr{P}(a) \sqcup \mathscr{P}(a) \approx \mathscr{P}(a).$$

GKH varsayımımıza göre $a \approx b \sqcup a$ veya $b \sqcup a \approx \mathscr{P}(a)$. Birinci durumda $b \preccurlyeq a$. İkinci durumda

$$b \sqcup a \approx \mathscr{P}(a \sqcup a) \approx \mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a).$$

Şimdi

$$f \colon b \sqcup a \xrightarrow{\approx} \mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a), \qquad\qquad \pi(x,y) = x$$

olsun. Cantor'un Teoremine göre, $a \approx f\big[a \times \{1\}\big]$ olduğundan

$$\pi\Big[f\big[a \times \{1\}\big]\Big] \subset \mathscr{P}(a),$$

dolayısıyla $\mathscr{P}(a) \smallsetminus \pi\big[f[a \times \{1\}]\big]$ farkının c elemanı vardır. Eğer

$$d = \Big\{x \in b \colon \pi\big(f(x,0)\big) = c\Big\}$$

ise, o zaman $f[d] = \{c\} \times \mathscr{P}(a)$, dolayısıyla

$$d \approx \mathscr{P}(a), \qquad \mathscr{P}(a) \preccurlyeq b, \qquad b \approx \mathscr{P}(a).$$

Kısaca, gösterdiğimiz

$$a \sqcup a \approx a \quad \wedge \quad b \preccurlyeq \mathscr{P}(a) \quad \Rightarrow \quad b \approx \mathscr{P}(a) \quad \vee \quad b \preccurlyeq a.$$

Hartogs'un Teoremine (yani Teorem 107'ye) göre bir β ordinali için $\beta \not\preccurlyeq a$, ama $\beta \preccurlyeq \mathscr{P}^4(a)$. O zaman β, ya $\mathscr{P}^4(a)$, ya $\mathscr{P}^3(a)$, ya $\mathscr{P}^2(a)$, ya da $\mathscr{P}(a)$ ile eşleniktir. Her durumda $a \preccurlyeq \beta$, dolayısıyla a iyisıralanabilir. □

Teorem 123. GKH ⇒ KH.

Kanıt. GKH doğru ise, son teoreme göre her küme iyisıralanabilir. Bu durumda her kümenin cardinali vardır. Özel olarak $\mathscr{P}(\omega)$ kümesinin $\aleph_\beta$ cardinali vardır, ve $\beta \neq 0$, dolayısıyla

$$\omega \prec \aleph_1 \preccurlyeq \mathscr{P}(\omega).$$

□

5.8. Kardinaller kuvvetleri

Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezini kabul etmeyeceğiz, ama Teorem 122'nin sonucunu kabul edeceğiz. Seçim Aksiyomunun çok biçimleri vardır; ama bizim için en uygun biçimi, aşağıdadır.

AKSİYOM 9 (Seçim)**.** *Her küme iyisıralanabilir.*

Her *sayılabilen* küme zaten iyisıralanabildi. Şimdi her sayılamaz sonsuzluktaki küme iyisıralanabilir, yani bundan 0 adlı bir elemanı seçilebilir, ve ondan sonra 1 adlı elemanı, vesaire.

Öyleyse her kümenin kardinali vardır. Kuvvet Kümesi Aksiyomunun sayesinde ${}^{\beta}\alpha$ sınıfı bir kümedir, çünkü

$$ {}^{\beta}\alpha \subseteq \mathscr{P}(\beta \times \alpha). $$

O zaman

$$ \kappa^{\lambda} = \mathrm{kard}({}^{\lambda}\kappa) $$

tanımını yapabiliriz. (Bu kuvvet, *ordinaller* kuvveti değildir.)

Teorem 124. *Tüm κ, λ, μ, ve ν kardinalleri için*

$$ \begin{aligned} 0 < \lambda \Rightarrow 0^{\lambda} &= 0, \\ \kappa^0 &= 1, \\ 1^{\lambda} &= 1, \\ \kappa^1 &= \kappa, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^{\lambda} \otimes \kappa^{\mu}, \\ \kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^{\lambda})^{\mu}, \\ \kappa \leqslant \mu \wedge \lambda \leqslant \nu &\Rightarrow \kappa^{\lambda} \leqslant \mu^{\nu}. \end{aligned} $$

Alıştırma 66. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 125. *Her κ için*

$$ \kappa < 2^{\kappa}. $$

Alıştırma 67. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 126. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \mathrm{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$ \kappa \leqslant 2^{\lambda} \Rightarrow \kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}, \tag{$\|$} $$

$$ \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa}. \tag{$**$} $$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^{\lambda}$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\lambda}$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla

$$ 2^{\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\lambda})^{\lambda} = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^{\lambda}. $$

Ayrıca $\lambda \leqslant \kappa$ ise κ sonsuzdur, dolayısıyla

$$ \kappa \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^{\kappa}. $$

□

Teoremin ($\|$) ile ($**$) gerektirmelerinde $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ile $\lambda \leqslant \kappa$ koşulları, aynı anda doğru olabilir. Bu durumda ($\|$) gerektirmesi, diğerinden daha çok bilgi verir. Böylece ($**$) satırındaki cümlenin yerine

$$2^\lambda < \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa$$

cümlesi konulabilir. Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
$$2^{\aleph_0} < \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^{\aleph_0} \leqslant 2^\kappa.$$

Şimdi

$$\beth_0 = \omega,$$
$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha},$$
$$\beta \text{ limit} \Rightarrow \beth_\beta = \sup\{\beth_\xi \colon \xi < \beta\}$$

olsun. (Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.)

Teorem 127. *$\xi \mapsto \beth_\xi$ göndermesi, normal bir işlemidir.* GKH *doğrudur ancak ve ancak her α ordinali için*

$$\aleph_\alpha = \beth_\alpha.$$

Alıştırma 68. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 128. *Tüm κ ve λ için*

$$2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1},$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^\lambda = \beth_{\alpha+1}.$$

Alıştırma 69. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $\lambda \leqslant \kappa$ (veya $2^\lambda < \kappa$) durumunu iki duruma böleceğiz.

5.8.1. Kofinallık

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup\{\xi\colon \xi < \kappa\} = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_x\colon x \in \omega\}.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall\xi\ \big(\xi < \alpha \Rightarrow \exists\eta\ (\eta \in b \land \xi < \eta)\big)$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*)* altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_x\colon x \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalinin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\mathrm{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x)\colon x \subseteq \alpha \land \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\mathrm{kf}(0) = 0, \qquad\qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 129. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

---

*[15, §13.7, s. 156] kaynağında b, α ordinalinin bir *kofinal* altkümesidir.

Kanıt. $f\colon \operatorname{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\operatorname{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \operatorname{maks}\Big(f(\beta), \sup\big(g[\beta]\big)\Big)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \operatorname{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 130. *α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f\colon \alpha \to \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman*

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\operatorname{kf}(\beta) \leqslant \operatorname{kf}(\alpha)$ ve $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g\colon \operatorname{kf}(\alpha) \to \alpha$ ve $\bigcup g[\operatorname{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\operatorname{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \qquad\qquad \delta < f(\theta) < f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $\bigcup(f \circ g)[\operatorname{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\beta) \leqslant \operatorname{kf}(\alpha)$.

2. $h\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \beta$ ve $\bigcup h[\operatorname{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \operatorname{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\operatorname{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f(k(\delta)),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\operatorname{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ ve aslında $\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta)$. □

Özel durum olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limit ise

$$\mathrm{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \mathrm{kf}(\alpha).$$

Teorem 131. *α limit ise* $\mathrm{kf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{kf}(\alpha)$.

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. □

Teorem 132. *Cantor normal biçiminde*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \textit{eğer } \alpha_n \textit{ bir ardılsa,} \\ \mathrm{kf}(\alpha_n), & \textit{eğer } \alpha_n \textit{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta + \alpha) = \mathrm{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \mathrm{kf}(\delta^\alpha).$$ □

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$$

ise, o zaman $\mathrm{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^\alpha$.

Teorem 133. *Her α ordinali için*

$$\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f\colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^\xi\aleph_\alpha \colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_{\alpha}$ kümesinin en küçük *gömmesi,* g_{δ} olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta \colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \bigl(g_{\beta}(\delta), g_{\delta}(\gamma)\bigr)$$

olsun. Böylece

$$\operatorname{kard}\bigl(\sup(f[\beta])\bigr) \leqslant \operatorname{kard}(\aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}) = \aleph_{\alpha},$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\operatorname{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

5.8.2. Hesapmalar

Teorem 134. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \operatorname{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda},$$
$$\mathrm{GKH} \wedge \lambda < \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^{\lambda}.$$

Kanıt. $\operatorname{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_{\xi} \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_{\xi} \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Bigl(\kappa \smallsetminus \bigl\{g_{\xi}(\eta) \colon \xi < f(\eta)\bigr\}\Bigr)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \operatorname{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 133'ün kanıtındaki gibi

$${}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}(\operatorname{kard}\xi) = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2.$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^{\mu} \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^{\lambda} \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{gathered} 2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\lambda} \Rightarrow \kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}, \\ \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa}, \\ 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa}. \end{gathered}$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^{\lambda} = \begin{cases} \lambda^{+}, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise,} \\ \kappa^{+}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise,} \\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise.} \end{cases}$$

Özel olarak

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow {\aleph_{\alpha}}^{\aleph_{\beta}} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_{\beta} \leqslant \aleph_{\alpha} \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha}, & \text{eğer } \aleph_{\beta} < \mathrm{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$

A. Schröder–Bernstein Teoremi

Tekrar Schröder–Bernstein Teoremine (yani Teorem 101'e) bakacağız.

Teorem (Schröder–Bernstein). *Tüm a ve b kümeleri için*

$$a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Kanıt (Zermelo [29]). $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} b$ ve $g\colon b \xrightarrow{\preccurlyeq} a$ olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)[a] \subseteq g[b] \subseteq a, \qquad g[b] \approx b.$$

Biz $a \approx g[b]$ eşlenikliğini kanıtlayacağız. Sonuç olarak $a \approx b$ olacaktır.

a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir h eşlemesini tanımlayabilirsek, herhalde a kümesinin bir c altkümesi için

$$h = \{(x, x)\colon x \in c\} \cup \{(x, (g \circ f)(x))\colon x \in a \smallsetminus c\} \tag{$*$}$$

olacaktır. O halde

$$c \cup (g \circ f)[a \smallsetminus c] = g[b] \tag{$\dagger$}$$

olmalıdır, çünkü $h[a] = g[b]$ olacaktır. Ayrıca

$$c \cap (g \circ f)[a \smallsetminus c] = \varnothing \tag{$\ddagger$}$$

olmalıdır, çünkü h bir gömme olacaktır. O zaman

$$c = g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a \smallsetminus c]$$

olmalıdır. $g \circ f$ birebir olduğundan

$$(g \circ f)[a \smallsetminus c] = (g \circ f)[a] \smallsetminus (g \circ f)[c],$$

dolayısıyla

$$c = g[b] \smallsetminus \bigl((g \circ f)[a] \smallsetminus (g \circ f)[c]\bigr)$$

olmalıdır. $(g \circ f)[c] \subseteq (g \circ f)[a] \subseteq g[b]$ olduğundan

$$c = \bigl(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\bigr) \cup (g \circ f)[c] \tag{§}$$

olmalıdır. Ters olarak, eğer c, (§) satırındaki gibiyse, o zaman (†) ile (‡) satırları doğrudur, ve sonuç olarak, $g \circ f$ birebir olduğundan, $(*)$ satırındaki gibi h göndermesi, a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir eşlemedir.

Şimdi öyle bir c kümesini bulmalıyız. O zaman

$$\boldsymbol{A} = \bigl\{x\colon \bigl(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\bigr) \cup (g \circ f)[x] \subseteq x \subseteq a\bigr\}$$

olsun. Bu durumda $a \in \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir küme olmalıdır. Bu küme c olsun. O zaman $c \in \boldsymbol{A}$ olmalıdır (neden?). Eğer (§) satırı yanlış ise, o zaman

$$d \in c \smallsetminus \Bigl(\bigl(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\bigr) \cup (g \circ f)[c]\Bigr)$$

cümlesini sağlayan bir d vardır. Bu durumda

$$c \smallsetminus \{d\} \in \boldsymbol{A}, \qquad \bigcap \boldsymbol{A} \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad c \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad d \notin c.$$

Bu bir çelişkidir. O zaman (§) satırı doğru olmalıdır, ve $a \approx g[b]$, dolayısıyla $a \approx b$. □

Kaynakça

[1] I. M. Bocheński. *A history of formal logic.* Translated and edited by Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1961.

[2] George Boolos. Iteration again (1989). In *Logic, Logic, and Logic*, pages 88–104. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998. With introductions and an afterword by John P. Burgess, With a preface by Burgess and Richard Jeffrey, Edited by Jeffrey.

[3] Cesare Burali-Forti. A question on transfinite numbers. In van Heijenoort [26], pages 104–12. First published 1897.

[4] Georg Cantor. Letter to Dedekind. In van Heijenoort [26], pages 113–7. First published 1899.

[5] Paul J. Cohen. *Set theory and the continuum hypothesis.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966.

[6] Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers. I: Continuity and irrational numbers. II: The nature and meaning of numbers.* authorized translation by Wooster Woodruff Beman. Dover Publications Inc., New York, 1963.

[7] René Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[8] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated into English by Arthur A. Clarke, revised by William C. Waterhouse.

[9] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12):556–557, December 1938.

[10] Kurt Gödel. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(4):220–224, April 1939.

[11] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I. In van Heijenoort [26], pages 596–616. First published 1931.

[12] Casimir Kuratowski. Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, pages 161–71, 1921.

[13] Azriel Levy. *Basic set theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1979 original [Springer, Berlin].

[14] Geoffrey Lewis. *Turkish Grammar*. Oxford University Press, second edition, 2000. First edition 1967.

[15] Ali Nesin. Aksiyomatik kümeler kuramı. `http://www.acikders.org.tr/`, 2010.

[16] Ali Nesin. *Sezgisel Kümeler Kuramı*, volume 6 of *Nesin Matematik Köyü Kitaplığı*. Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2010.

[17] Filiz Öktem. *Uygulamalı Latin Dili [Practical Latin Grammar]*. Sosyal Yayınlar, İstanbul, 1996.

[18] Giuseppe Peano. The principles of arithmetic, presented by a new method. In van Heijenoort [26], pages 83–97. First published 1889.

[19] David Pierce. Induction and recursion. *The De Morgan Journal*, 2(1):99–125, 2012. http://education.lms.ac.uk/2012/04/david-pierce-induction-and-recursion/.

[20] Atilla Özkırımlı. *Türk Dili, Dil ve Anlatım: Yaşayan Türkçe Üzerine Bir Deneme*. İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2001.

[21] Bertrand Russell. Letter to Frege. In van Heijenoort [26], pages 124–5. First published 1902.

[22] Wacław Sierpiński. L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix. *Fund. Math.*, 34:1–5, 1947.

[23] Thoralf Skolem. Some remarks on axiomatized set theory. In van Heijenoort [26], pages 290–301. First published 1922.

[24] Alfred Tarski. The concept of truth in formalized languages (1933). In *Logic, semantics, metamathematics*, pages 152–278. Hackett Publishing Co., Indianapolis, IN, second edition, 1983. Papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Edited and with an introduction by John Corcoran.

[25] Alfred Tarski and Steven Givant. *A formalization of set theory without variables*, volume 41 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[26] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[27] John von Neumann. On the introduction of transfinite numbers. In van Heijenoort [26], pages 346–354. First published 1923.

[28] Norbert Wiener. A simplification of the logic of relations. In van Heijenoort [26], pages 224–7. First published 1914.

[29] Ernst Zermelo. Investigations in the foundations of set theory I. In van Heijenoort [26], pages 199–215. First published 1908.

İşaretler

Dizin

Ü

V

Y