Aksiyomatik Kümeler Kuramı Özeti

David Pierce

10 Mart 2014

a, b, c, ..., **kümedir.**
x, y, z, ..., kümeler için **değişkendir.**
$x \in y$ formülüne göre x, y'nin **elemanıdır,** ve y, x'i **içerir.**

1 Tanım. $a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$, ve bu durumda a ve b, birbirine **eşittir.**

2 Aksiyom. $a = b \Rightarrow \forall x\ (a \in x \Rightarrow b \in x)$.

3 Teorem. Her $\varphi(x)$ formülü için $a = b \Rightarrow \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$. (Bu teoremi kanıtlamadık.)

Her $\varphi(x)$ formülü, $\{x\colon \varphi(x)\}$ **sınıfını** tanımlar. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, sınıftır.

4 Tanım. $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$, ve bu durumda $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$'yı **kapsar.**

5 Tanım.
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A},$$
$$a = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$\boldsymbol{B} = a \Leftrightarrow a = \boldsymbol{B}.$$

6 Teorem. Kümelerin ve sınıfların eşitliği, aynılık olarak düşünülebilir.

7 Teorem. Her küme, bir sınıftır: $a = \{x\colon x \in a\}$.

8 Teorem (Russell Paradoksu)**.** Bazı sınıflar küme değildir. Aslında $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, bir küme değildir.

9 Tanım.
$$\varnothing = \{x\colon x \neq x\},$$
$$a \cup \{b\} = \{x\colon x \in a \vee x = b\}.$$

10 Aksiyom (Boş Küme)**.** $\varnothing$ bir kümedir: $\exists x\ x = \varnothing$.

11 Aksiyom (Bitiştirme)**.** $a \cup \{b\}$ bir kümedir.

12 Tanım.

$$\begin{aligned} \varnothing \cup \{a\} &= \{a\}, & \text{ve}\quad 0 &= \varnothing,\\ \{a\} \cup \{b\} &= \{a, b\}, & 1 &= \{0\},\\ \{a, b\} \cup \{c\} &= \{a, b, c\}, & 2 &= \{0, 1\},\\ \{a, b, c\} \cup \{d\} &= \{a, b, c, d\}, & 3 &= \{0, 1, 2\},\\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots \end{aligned}$$

$a' = a \cup \{a\}$, ve bu küme, a'nın **ardılıdır.**

Böylece $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$, ...

13 Tanım.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{x \colon x = x\},\\ \bigcap \boldsymbol{A} &= \{x \colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\},\\ \bigcup \boldsymbol{A} &= \{x \colon \exists y\ (y \in \boldsymbol{A} \wedge x \in y)\}. \end{aligned}$$

14 Teorem. $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$.

15 Aksiyom (Ayırma)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq b$ ise $\boldsymbol{A}$ bir kümedir.

16 Teorem. $\mathbf{V}$ bir küme değildir.

17 Teorem. $b \in \boldsymbol{A}$ ise $\bigcap \boldsymbol{A} \subseteq b \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$. Özel olarak $\boldsymbol{A}$ boş değilse $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir kümedir.

18 Tanım. $\Omega = \{x \colon 0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x)\}$.

19 Aksiyom (Sonsuzluk)**.** $\Omega \neq \varnothing$.

20 Tanım. $\omega = \bigcap \Omega$. Bu bir kümedir, ve elemanları, **(von Neumann) doğal sayılarıdır.**

21 Teorem.

1. $0 \in \omega$.
2. $k \in \omega \Rightarrow k' \in \omega$.
3. **Tümevarım:** $A \subseteq \omega$ olsun, ve
   - $0 \in A$, ve
   - $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x' \in A)$

   varsayılsın. O zaman $A = \omega$.

22 Tanım. $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \subseteq \boldsymbol{A})$ ise $\boldsymbol{A}$ **geçişlidir.**

23 Teorem. Her doğal sayı geçişlidir.

Kanıt. Tümevarım. $\square$

24 Teorem. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x \notin x)$.

Kanıt. Tümevarım ve 23 numaralı teorem. $\square$

25 Teorem. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x' = y' \Rightarrow x = y)$.

Kanıt. 24 numaralı teorem. $\square$

21 ve 25 numaralı teoremler ve $\forall x\ x' \neq 0$ teoremi, **Dedekind–Peano Aksiyomlarıdır.** Bizim için aksiyom değil, teoremdir.

26 Tanım. $(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.

27 Teorem. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

28 Tanım. $\{(x, y)\colon \varphi(x, y)\} = \big\{z\colon \exists x\ \exists y\ \big(z = (x, y) \wedge \varphi(x, y)\big)\big\}$,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y)\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}\}.$$

29 Tanım. $\boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ ise $\boldsymbol{R}$ bir **ikili bağıntıdır.** Bu durumda

$$a\ \boldsymbol{R}\ b \Leftrightarrow (a, b) \in \boldsymbol{R}.$$

30 Tanım. Eğer $\boldsymbol{R}$ bir ikili bağıntı ve $\boldsymbol{A}$'nın tüm a, b, ve c elemanları için

$$\neg(a\ \boldsymbol{R}\ a), \qquad (a\ \boldsymbol{R}\ b \wedge b\ \boldsymbol{R}\ c \Rightarrow a\ \boldsymbol{R}\ c)$$

ise $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$'da bir **sıralamadır.**

31 Tanım. Eğer $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$'da bir sıralama ve

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x\ \boldsymbol{R}\ y \vee x = y \vee x\ \boldsymbol{R}\ y)$$

ise $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$'da bir **doğrusal sıralamadır.**

32 Teorem. $\in$, her doğal sayıda doğrusal bir sıralamadır.

Kanıt. Tümevarım, ve 24 ve 23 numaralı teoremler. $\square$

33 Tanım. $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$'da doğrusal bir sıralama olsun. Eğer $B \subseteq \boldsymbol{A}$ ve $c \in B$ ve

$$\forall x\ (x \in B \Rightarrow c\ \boldsymbol{R}\ x)$$

ise, o zaman c, B'nin **en küçük** veya **minimum** elemanıdır. Eğer $\boldsymbol{A}$'nın boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı varsa, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından **iyi sıralanır.**

34 Teorem. Her doğal sayı, $\in$ tarafından iyi sıralanır.

Kanıt. 32 numaralı teorem ve tümevarım. □

35 Tanım. $\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} = \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \land x \notin \boldsymbol{B}\}$.

36 Tanım. $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

37 Teorem. ω'da $\in$ ve $\subset$ aynı bağıntıdır.

Kanıt. $k \in m$ ise 23 ve 24 numaralı teoremlerle $k \subset m$.
$k \subset m$ ise 34 ve 23 numaralı teoremleri kullanarak

$$k = \min(m \smallsetminus k).$$ □

38 Teorem. ω, $\in$ tarafından iyi sıralanır.

Kanıt. 23 ve 24 numaralı teoremlere göre $\in$, ω'da bir sıralamadır.
$m \notin k$ ve $m \neq k$ ise 34 ve 23 numaralı teoremleri kullanarak

$$\min(m \smallsetminus k) \subseteq k.$$

37 numaralı teoremi kullararak $\min(m \smallsetminus k) = k$.
34 numaralı teoremi kullanarak ω iyi sıralanmıştır. □

39 Teorem. ω geçişlidir.

Kanıt. Tümevarım. □

40 Tanım. Geçişli ve $\in$ tarafından iyi sıralanmış bir küme, bir **ordinaldir.** Ordinaller, **ON** sınıfını oluştururlar.

O zaman $\omega \subseteq \mathbf{ON}$ ve $\omega \in \mathbf{ON}$.

41 Teorem (Burali-Forti Paradoksu)**.** **ON** geçişli ve $\in$ tarafından iyi sıralanmıştır, dolayısıyla bir küme olamaz.