

Kümeler kuramı alıştırmaları

David Pierce

May 19, 2014

Matematik Bölümü

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr

<http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/>

Alıştırma I. A , B , ve C sınıf ise, hangi formüller aşağıdaki sınıfları tanımlar?

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 1. $A \cap B$. | 5. $\cap A$. |
| 2. $A \cup B$. | 6. $\cup A$. |
| 3. $(A \cap B) \cup C$. | 7. $\cup \cup A$. |
| 4. $A \setminus B$. | 8. $\mathcal{P}(A)$. |

Alıştırma II. Aşağıdaki kümelerin oluşturduğu sınıflarını tanımlayan formüller yazın. Kısaltmalar kullanırsanız, onları da tanımlamalısınız.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. Boş kümeler. | 6. Boş olmayan, en çok iki elemanlı kümeler. |
| 2. Boş olmayan kümeler. | 7. Sıralı ikililer. |
| 3. Tek elemanlı kümeler. | 8. Küme olan iki konumlu bağıntılar. |
| 4. İki elemanlı kümeler. | 9. Küme olan göndermeler. |
| 5. En çok iki elemanlı kümeler. | |

- | | |
|--|---|
| 10. Küme olan geçişli bağıntılar.
11. Geçişli kümeler.
12. İçerilme tarafından iyisrılanmış kümeler. | 13. Ordinaller.
14. Doğal sayılar.
15. Kardinaller. |
|--|---|

Alıştırma III. Aşağıdaki bir ordinaller eşitliği her zaman doğru ise kanıtlayın; değilse bir karşıt örnek verin.

- | | |
|--|--|
| 1. $\alpha + 0 = \alpha$.
2. $0 + \alpha = \alpha$.
3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
5. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
6. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
7. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.
8. $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.
9. $\alpha + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.
10. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
11. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
12. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
13. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. | 14. $\alpha^0 = 0$.
15. $\alpha^0 = 1$.
16. $0^\alpha = 1$.
17. $0^\alpha = 0$.
18. $\alpha^\beta = \beta^\alpha$.
19. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2$.
20. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta + \alpha^\gamma$.
21. $(\alpha + \beta)^\gamma = \alpha^\gamma + \beta^\gamma$.
22. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.
23. $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
24. $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$.
25. $\alpha^{(\beta^\gamma)} = (\alpha^\beta)^\gamma$. |
|--|--|

Alıştırma IV. Cantor normal biçimleri bulun:

- | | |
|---|--|
| 1. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$.
2. $3 \cdot (\omega + 4)$.
3. $(\omega + 4) \cdot 3$.
4. $(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$.
5. $(\omega + 5)^2$.
6. $9^{\omega+2}$. | 7. $(\omega + 5)^{\omega+2}$.
8. $(\omega^\omega)^{\omega^\omega}$.
9. $(\omega^{\omega^\omega})^{\omega^\omega}$.
10. $6^{\omega^{1330}}$.
11. $(\omega^2 + \omega + 1)^{\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1}$. |
|---|--|

$$12. \omega^{\omega \cdot 2 + \omega^{17}} \cdot 5 + \omega^{\omega^5} \cdot 14 + \omega^{\omega^{\omega} + \omega^{17}} \cdot 6 + \omega + 317.$$

Alıştırma V. Her kümenin kardinali, \aleph_α veya \beth_α biçiminde yazın.

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. ω. 2. ω^ω. 3. $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$. 4. Sayılabilir ordinarler kümesi. 5. $\aleph_3 \oplus \aleph_5$. 6. $\aleph_5 \oplus \aleph_3$. 7. $\aleph_3 \otimes \aleph_5$. 8. $\aleph_5 \otimes \aleph_3$. 9. $\aleph_{2 \cdot \omega} \oplus \aleph_{\omega \cdot 2}$. 10. $(\aleph_2 \oplus \aleph_3) \otimes (\aleph_\omega \oplus \aleph_{16})$. 11. $(\aleph_2 \oplus \aleph_3) \otimes (\omega \oplus \aleph_{16})$. 12. $(\aleph_2 \otimes \aleph_3) \oplus (\aleph_\omega \otimes \aleph_{16})$. 13. $\aleph_{\omega^\omega} \oplus \aleph_\omega$. 14. $\aleph_\omega \oplus \aleph_{\omega^\omega}$. 15. $\aleph_{\omega^\omega} \otimes \aleph_\omega$. 16. \mathbb{R}. | <ol style="list-style-type: none"> 17. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. 18. \mathbb{R} kümesinin sonlu altkümeleri kümesi. 19. ${}^\omega\mathbb{R}$. 20. \mathbb{R} kümesinin sayılabilir altkümeleri kümesi. 21. \mathbb{R} kümesinin sayılamaz altkümeleri kümesi. 22. $(\aleph_0)^{\aleph_0}$. 23. $\beth_0^{\beth_0}$. 24. $(\beth_1)^{\beth_1}$. 25. $(\aleph_1)^{\beth_1}$. 26. $\sup\{\aleph_0, \aleph_0^{\aleph_0}, \aleph_0^{\aleph_0^{\aleph_0}}, \dots\}$. 27. $(\aleph_{\omega^2 \cdot 3 + \omega})^{\beth_{\omega^\omega}}$. 28. $\beth_{\omega+1}^{\beth_\omega}$. 29. $\mathcal{P}(\beth_\omega)$. |
|---|--|