Kümeler kuramı

David Pierce

12 Şubat 2014

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Bu eser
Creative Commons Attribution–Gayriticari–Share-Alike
3.0 Unported Lisansı ile lisanslıdır.
Lisansın bir kopyasını görebilmek için,
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.tr
adresini ziyaret edin ya da aşağıdaki adrese yazın:
Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900,
Mountain View, California, 94041, USA.

(cc) (by) David Austin Pierce ($) (ɔ)

Bu notları, MAT 340 kodlu Aksiyomatik Kümeler Kuramı dersi için yazıyorum. Lütfen hataları bana bildirin.

İçindekiler

1 Giriş

1.1 Sayma ve ordinaller

Bir torbada birkaç tane satranç taşımız var, onları teker teker çekiyoruz, ve aynı zamanda sayılar diyoruz:

1: piyade (*pawn*);
2: kale (*rook*);
3: at (*knight*);
4: fil (*bishop*);
5: vezir (*queen*);
6: şah (*king*).

Bu şekilde taşları *saymış olduk.* Sonuç olarak 6 tane taşımız var deriz. Ama taşları belli bir *sırada* çektik. Başka bir sıra mümkündü. Taşları tekrar çantaya koyup çekiyoruz:

1: piyade;
2: at;
3: vezir;
4: kale;
5: fil;
6: şah.

Son taşı çekince yine 6 numarasını diyoruz. Her zaman öyle olacak: her zaman taşları sayınca 6'ya kadar sayacağız. Ama nasıl biliyoruz?

Saymak nedir? Saymanın nesnesi, bir **topluluktur** (*collection*).* Bir topluluğu sayınca aslında onu **sıralıyoruz** (*order*).

A bir topluluk olsun, ve R, onun bir **sıralaması** (*ordering*) olsun. O zaman A topluluğunun **elemanları** (*elements*) veya **öğeleri** (*members*) vardır; ve bu topluluğun tüm b, c, ve d elemanları için

1) $b\ R\ b$ değil, yani
$$\neg\, b\ R\ b;$$
2) $b\ R\ c$ ve $c\ R\ d$ ise $b\ R\ d$, yani
$$b\ R\ c \wedge c\ R\ d \Rightarrow b\ R\ d;$$
3) b ve c birbirinden farklıysa ya $b\ R\ c$ ya da $c\ R\ b$, yani
$$b = c \vee b\ R\ c \vee c\ R\ b.$$

Böylece R,

1) **yansımasız** veya **dönüşsüz** (*irreflexive*),†
2) **geçişli** veya **geçişken** (*transitive*),‡ ve
3) **doğrusal** (*linear*) veya **tam** (*total*)

bir bağıntıdır. O zaman (A, R) ikilisi (aslında *sıralı* ikilisi), bir **sıradır.** Bu sıra, A **topluluğunun bir sırasıdır.**

Şimdi A, satranç taşları torbamız olsun. O zaman A topluluğunun tüm sıraları, birbiriyle **izomorftur** (*isomorphic*). Yani R ile S, A topluluğunun iki sıralamasıysa, o zaman A topluluğundan kendisine

---

* **Kümeler** (*sets*), özel topluluk olacak.

† Işık, bir aynadan yansır; ses, bir kayalıktan yansır. *Yıkanmak* fiili, *kendi kendini yıkamak* öbeğinin anlamına gelirse, dönüşlüdür; *yıkanılma* fiilinin anlamına gelirse, edilgendir [14, 19].

‡ *Kaynatmak* fiili geçişlidir, çünkü bir nesne ister; *kaynamak* geçişsizdir.

giden öyle bir birebir ve örten f göndermesi vardır—yani A topluluğunun öyle bir f **permütasyonu** (*permutation*) veya **eşleşmesi** vardır—ki A topluluğunun tüm b ile c elemanları için

$$b\ R\ c \Leftrightarrow f(b)\ S\ f(c)$$

denkliği doğrudur. Ama bunu nasıl biliyoruz?

Şimdi A, pozitif *tamsayılar* topluluğu olsun. Yani $A = \mathbb{N}$ olsun. Bu topluluğun alışılmış "doğal" $<$ sıralaması vardır. Ama başka sıralamaları da vardır. Mesela $\mathbb{N}$ topluluğunun öyle bir R **bağıntısı** (veya **ilişkisi:** *relation*) vardır ki topluluğun tüm k ile m elemanları için

$$k\ R\ m \Leftrightarrow (1 < k \land k < m) \lor (1 = m \land m < k)$$

denkliği doğrudur. Öyleyse R bağıntısı, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor; aslında R sıralaması, $<$ sırası ile hemen hemen aynıdır, ancak R sırasına göre 1 elemanı, $\mathbb{N}$ topluluğunun *son* elemanıdır. O zaman $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, R)$, birbirine izomorf değildir:

$$\begin{array}{c|ccccc} < & 1, & 2, & 3, & \dots; & ? \\ \hline R & 2, & 3, & 4, & \dots; & 1 \end{array}$$

Şimdi

$$k\ S\ m \Leftrightarrow (2 \mid k + m \land k < m) \lor (2 \nmid k \land 2 \mid m)$$

olsun. O zaman $k\ S\ m$ ancak ve ancak

1) hem k hem m ya tek ya çift, ve $k < m$, veya
2) k tek ve m çift.

O zaman S bağıntısı da, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor, ama $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, S)$ sıraları, birbirine izomorf değildir:

$$\begin{array}{c|cccccccc} < & 1, & 2, & 3, & \dots; & ? & ? & ? & \dots \\ \hline S & 1, & 3, & 5, & \dots; & 2, & 4, & 6, & \dots \end{array}$$

$\mathbb{N}$ topluluğu sayılabilir mi? Normalde, sayarken, sayılar diyoruz. R sıralamasına göre $\mathbb{N}$ topluluğunu sayınca 1 için hangi sayıyı diyebiliriz? Yani yukarıdaki ilk tablonun alt satırındaki 1 numarasının üstünde, soru işaretinin yerine hangi sayıyı koyabiliriz? Bu sayı $\omega+1$ olacak.Ondan sonra $\omega+2$, $\omega+3$, vesaire sayıları olacak; bunlardan sonra, $\omega+\omega$, yani $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, vesaire sayıları olacak. Ama $\mathbb{N}$ topluluğunun sadece ω tane elemanı olacak.

Aslında kümeler kuramcıları olarak sayarken, 0'dan başlayacağız:

	0,	1,	2,	…;	ω,	$\omega+1$,	$\omega+2$,	…
S	1,	3,	5,	…;	2,	4,	6,	…

Burada 0, 1, 2, 3, …; ω, $\omega+1$, $\omega+2$, …; $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, … numaraları, **ordinal sayılar** veya **ordinallerdir.** (Her ordinal, bu sırada bulunacak.) Ayrıca 0, 1, 2, 3, …, ω numaraları, **kardinal** (*cardinal*) **sayılar** veya **kardinaldirler** (başka kardinaller olacak); ama $\omega+1$, bir kardinal değildir.

Her kardinal, bir ordinal olacak, ama her ordinal, bir kardinal olmayacak.

Her ordinal, bir **küme** olacak; ama bazı kümeler, ordinal olmayacak.

Her **küme,** bir topluluk olacak; ve her kümenin her elemanı, bir küme olacak. O zaman a ile b kümeyse, ya a kümesi, b kümesinin elemanıdır, ya da elemanı değildir. İlk durumda b kümesi, a kümesini **içerir** (*contains*), yani a kümesi, b kümesi tarafından **içerilir,** ve

$$a \in b$$

ifadesini yazarız;* ikinci durumda b kümesi, a kümesini **içermez,** ve

$$a \notin b$$

ifadesini yazarız. Genelde C bir topluluk ise, ya $a \in C$ ya da $a \notin C$.

Bize göre **boş bir topluluk**—elemanları olmayan bir topluluk—vardır, ve bu topluluk, bir kümedir. Bu varsayım, **Boş Küme Aksiyomudur** (*Empty Set Axiom*). Boş kümenin işareti,

$$\varnothing.$$

Ayrıca a ile b kümeyse, o zaman öyle bir küme vardır ki her elemanı, ya a kümesinin bir elemanı, ya da b kümesinin kendisidir. Bu yeni kümenin ifadesi,

$$a \cup \{b\}.$$

Bu topluluğun küme olduğu, **Bitiştirme Aksiyomudur** (*Adjunction Axiom*).† Burada a boş ise, yeni $a \cup \{b\}$ kümesi,

$$\{b\}$$

olarak yazılır. O zaman aşağıdaki gibi kümelerimiz vardır:

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, \quad \Big(\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}\Big) \cup \Big\{\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}\Big\}.$$

Bu ifadelerin yerine

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}$$

*Buradaki $\in$ işareti, Yunan ε (epsilon) harfinden türer. Bu harf, ἐστί kelimesinin ilk harfidir, ve A ἐστί B cümlesi, "A, B'dir" (A *is* B) anlamına gelir. Epsilonun bu kullanışını, Peano [17] ortaya koymuştur.

†Bu aksiyom, Tarski ve Givant [24, p. 223, QIII] kaynağında bulunur; İngilizce adı, Boolos [2, p. 100] kaynağında bulunur.

ifadelerini yazabiliriz. Aslında 0sayısını $\varnothing$ olarak tanımlarız, yani

$$0 = \varnothing.$$

Bu sayı, **ilk ordinaldir.** Her α ordinali için bir sonraki ordinal olacak, ve bu ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ olacak. Mesela 0'dan bir sonraki ordinal $\{0\}$ olacak; yani

$$1 = \{0\}$$

olacak. Ayrıca her α ordinal için

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

olacak. Ama bildiğimiz gibi

$$1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4,$$

vesaire. O zaman

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

vesaire. Böyle tanımlanmış sayılar, **von Neumann doğal sayılarıdır** (*von Neumann natural numbers* [26]). Bu sayılar, bir topluluğu oluşturacak, ve bu topluluk, ω olacak. Yani ω, öyle bir topluluktur ki

1) $0 \in \omega$,
2) $\alpha \in \omega$ ise $\alpha + 1 \in \omega$, ve
3) ω topluluğunun başka elemanı yoktur.

Öyleyse ω topluluğunun tanımı, **özyineli** veya **rekürsiftir** (*recursive*).

1.2 Ordinaller Hesapları

Sonsuzluk Aksiyomuna* (*Axiom of Infinity* [28]) göre ω topluluğu, bir küme olacak. O zaman ω bir ordinal olacak, ve bu ordinalin her k elemanı için $\omega + k$ kümesi, bir ordinal olacak.

Aslında tüm α ile β ordinaller için

$\alpha + \beta$ toplamını, $\alpha \cdot \beta$ çarpımını, ve α^β kuvvetini

tanımlayacağız. O zaman

$$\begin{gathered} 1 + \omega = \omega < \omega + 1, \\ 2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2, \\ (\omega + 1)^\omega = \omega^\omega < \omega^{\omega+1} \end{gathered}$$

olacak. Aslında:

- $1 + \omega$ toplamı,
$$(0, 0, 1, 2, 3, \dots)$$
sırasının ordinalidir, ama $\omega + 1$,
$$(0, 1, 2, 3, \dots, 0)$$
sırasının ordinalidir.

- $2 \cdot \omega$ çarpımı,
$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$
sırasının ordinalidir, ama $\omega \cdot 2$,
$$(0, 1, 2, 3, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

*Veya **Sonsuz Küme Aksiyomu** [16].

sırasının ordinalidir; ayrıca

$$\begin{aligned}2\cdot\omega &= 2+2+2+\cdots,\\ \omega\cdot 2 = \omega+\omega &= \omega+1+1+1+\cdots\end{aligned}$$

(15 numaralı sayfaya bakın).

• $(\omega+1)^\omega$ kuvveti,

$$((\omega+1)^2, (\omega+1)^3, (\omega+1)^4, \ldots)$$

dizisinin **limitidir,** ve

$$\begin{aligned}(\omega+1)^2 &= (\omega+1)\cdot(\omega+1)\\ &= (\omega+1)\cdot\omega + (\omega+1)\cdot 1\\ &= (\omega+1+\omega+1+\omega+1+\cdots)+\omega+1\\ &= (\omega+\omega+\omega+\cdots)+\omega+1\\ &= \omega^2+\omega+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega+1)^3 &= (\omega+1)^2\cdot(\omega+1)\\ &= (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega+1)\\ &= (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+\omega^2+\omega+1\\ &= (\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\ &= (\omega^2+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\ &= \omega^3+\omega^2+\omega+1,\end{aligned}$$

ve genelde

$$(\omega+1)^n = \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1.$$

Ayrıca her pozitif α ordinali için öyle bir ℓ doğal sayısı, ve $\alpha_0, \ldots, \alpha_\ell$ ordinalleri, ve $a_0, \ldots, a_\ell$ pozitif doğal sayıları vardır ki

$$\alpha_0 > \cdots > \alpha_\ell, \qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell.$$

Burada $\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_\ell} \cdot a_\ell$ ifadesi, α ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Her pozitif ordinalin tek bir Cantor normal biçimi vardır. Bundan hesaplama kuralları türeyebilir.

1.3 Kümeler ve Sınıflar

Her topluluk, bir küme değildir. Örneğin öyle bir R topluluğu vardır ki her elemanı bir küme, ama bu küme, kendisinin elemanı değildir. Yani

$$R = \{x \colon x \notin x\}.$$

Burada x değişkeni her zaman bir küme olacak. Şimdi a bir küme olsun. Eğer $a \in a$ ise, o zaman $a \notin R$, dolayısıyla $a \neq R$. Eğer $a \notin a$ ise, o zaman $a \in R$, dolayısıyla $a \neq R$. Her durumda R topluluğu, a kümesi değildir. Yani R, bir küme değildir. Bu teoreme **Russell Paradoksu** denir [20].

Elemanları küme olan bazı topluluklar, **sınıf** olacak. Her küme, bir sınıftır, ancak bazı sınıflar, küme değildir. Mesela yukarıdaki gibi $\{x \colon x \notin x\}$ topluluğu, bir sınıftır, ama gösterdiğimiz gibi küme değildir. Tanıma göre her sınıf,

$$\{x \colon \varphi(x)\}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\varphi(x)$, kümeler kuramının mantığında bir **formüldür.** Eğer a bir kümeyse, o zaman $\varphi(a)$ ifadesi, bir **cümledir.** Her cümle, ya doğru ya yanlıştır. Bir $\{x \colon \varphi(x)\}$ sınıfının elemanları, $\varphi(a)$ cümesini doğru yapan a kümeleridir. Bu sınıf, $\varphi(x)$ formülü tarafından **tanımlanır.**

Bir $\varphi(x)$ formülünün bir ve tek bir **serbest değişkeni** vardır, ve bu değişken, x olur. Ancak bir formülün birden fazla serbest değişkeni olabilir. Örneğin

$$\forall z \ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

ifadesi, bir formüldür, ve serbest değişkenleri, x ile y olur. Bu formülde z, **bağlantılı değişkendir.** Formül, kümelerin **eşitlik** bağıntısını tanımlar. Yani a ile b kümeleri birbirine eşittir, ancak ve ancak

$$\forall z\ (z \in a \Leftrightarrow z \in b),$$

yani elemanları aynıdır. Küme olmayan bir sınıfın olduğunu kanıtlarken, bu kuralı kullandık. Yukarıdaki $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün yerine

$$x = y$$

ifadesini yazarız. O halde bir $\{x\colon x = x\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf, tüm kümelerin sınıfıdır. Bu sınıf, **evrensel sınıftır** (*universal class*), ve işareti,

$$\mathbf{V}$$

olacak. Ayrıca a bir kümeyse, o zaman bir $\{x\colon x \in a\}$ sınıfı vardır, ama bu sınıf, a kümenin kendisidir, yani

$$a = \{x\colon x \in a\}.$$

Öyleyse, dediğimiz gibi, her küme, bir sınıftır.

Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmadan ω topluluğunun sınıf olduğu apaçık değildir, ama sınıf olacaktır. Ondan sonra Sonsuzluk Aksiyomu, $\exists x\ x = \omega$ biçiminde olabilecektir.

Aslında ω sınıfı bir küme olduğundan, **Yerleştirme Aksiyomuna** (*Replacement Axiom*)* göre $\{y\colon \exists x\ (x \in \omega \land y = \omega + x)\}$ sınıfı, bir küme olacaktır. Bu küme

$$\{\omega + x\colon x \in \omega\}$$

*Skolem [22], 1922 yılında bu aksiyomu tavsiye etti; aynı yılda Fraenkel, benzer bir aksiyomu tavsiye etmiş. Ayrıca Cantor'a [4, p. 114] bakın.

olarak yazılabilir. **Bileşim Aksiyomuna** (*Union Axiom* [28]) göre bu kümenin

$$\bigcup\{\omega + x \colon x \in \omega\} \qquad \text{veya} \qquad \bigcup_{x\in\omega}(\omega + x)$$

bileşimi de bir kümedir; tanıma göre bu bileşim, $\omega+\omega$ toplamıdır.

Kümelerden oluşturulmuş bazı topluluklar, sınıf değildir. Bu sonuç, **Gödel'in Eksiklik Teoremi** (*Gödel's Incompleteness Theorem* [11]) veya **Tarski'nin Doğruluğun Tanımlanamaması Teoremi** (*Tarski's Theorem on the Indefinability of Truth* [23]) gibidir. Bu teoremlerin asıl biçimleri, $\mathbb{N}$ topluluğu hakkındadır, ve bu biçimde teoremlerini kanıtlamak zordur. Fakat bu teoremler, $\mathbf{V}$ hakkında yazılabilir; ve bu biçimde onları kanıtlamak daha kolaydır.

Tüm ordinallerin topluluğu, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{ON}$$

olacak. Aslında bu sınıf, bir a kümesiyse, o zaman $a \in \mathbf{ON}$ olurdu, yani $a \in a$ olurdu; ama bir ordinal için bu içerme imkânsızdır. Sonuç olarak **ON**, bir küme değildir. Bu teorem, **Burali-Forti Paradoksu** [3] olarak bilinir.

1.4 Kardinaller

ON sınıfının bir sıralaması vardır, ve bu sıralama, *içerilmedir,* yani $\in$ ile gösterilen sıralamadır. **Seçim Aksiyomuna** (*Axiom of Choice* [28]) göre, her a kümesinden bir β ordinaline giden bir **eşleme** (yani bir birebir örten gönderme) vardır. O halde

$$a \approx \beta$$

ifadesini yazalım, ve a ile β kümelerine **eşlenik** densin [16, s. 82]. Eğer a verilirse, ve $a \approx \beta$ koşulunu sağlayan β ordinallerinin en küçüğü κ ("kappa") ise, o zaman κ, a kümesinin **kardinalidir.** Tüm kardinallerden oluşturulmuş topluluk, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{KN}$$

olacak. En küçük *sonsuz* kardinal, ω olur. **ON** sınıfından **KN** sınıfına giden bir

$$\xi \mapsto \aleph_\xi$$

göndermesi vardır. Burada

$$\aleph_0 = \omega \qquad \text{ve} \qquad \alpha < \beta \Leftrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta,$$

ve her sonsuz kardinal, bir α ordinali için, $\aleph_\alpha$ biçimindedir. İki kardinalin *kardinal* toplamı ve *kardinal* çarpımı vardır, ama

$$\aleph_\alpha \oplus \aleph_\beta = \aleph_\alpha \otimes \aleph_\beta = \aleph_{\text{maks}(\alpha,\beta)}$$

Ayrıca $1 \leqslant k < \omega$ ise $\aleph_\alpha \oplus k = k \oplus \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \otimes k = k \otimes \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Genelde siyah harfler, sınıfları gösterecek. Şimdi $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, sınıf olsun.Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfının her elemanı, $\boldsymbol{B}$ sınıfının elemanıysa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **$\boldsymbol{B}$ sınıfının altsınıfı** (*subclass of the class B*) denir, ve

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

ifadesi yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{B}$ sınıfı, $\boldsymbol{A}$ sınıfını **kapsar** (*includes*). İçerilme ($\in$) ve kapsanma ($\subseteq$) ilişkileri, birbirinden tamamen farklıdır.

Ayırma Aksiyomuna (*Separation Axiom* [28]) göre, her *kümenin* her altsınıfı, bir kümedir. Şimdi, eğer $\varphi(x)$ bir formül ise, ve a bir kümeyse, o zaman öyle bir sınıf vardır ki her elemanı, hem a kümesinin elemanıdır, hem de $\varphi(x)$ formülünü sağlar. Bu sınıf,

$$\{x \in a \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır. Ayırma Aksiyomuna göre, bu sınıf, bir kümedir. O zaman bu küme, a **kümesinin bir altkümesidir** (*a subset of the set a*).

Bir a kümesinin tüm altkümeleri, bir sınıf oluşturur. Bu sınıf, a kümesinin **kuvvet sınıfıdır** (*power class*), ve

$$\mathscr{P}(a)$$

olarak yazılır. **Kuvvet Kümesi Aksiyomuna** (*Power Set Axiom* [28]) göre, bu sınıf, her zaman bir kümedir. **Cantor'un Teoremine*** göre, her kümenin kuvvet kümesi, kümeden kesinlikle daha büyüktür, yani kardinali daha büyüktür. Bu teorem,

$$a \prec \mathscr{P}(a)$$

ifadesiyle söylenir.

Eğer a ile b, iki kümeyse, o zaman a kümesinden b kümesine giden göndermeler topluluğu, bir kümedir, ve bu küme

$$^{a}b$$

olarak yazılabilir. O zaman $^{a}2 \approx \mathscr{P}(a)$. Eğer κ ile λ, iki kardinal ise, tanıma göre

$$\kappa^{\lambda}$$

kuvveti, $^{\lambda}\kappa$ kümesinin kardinalidir. Eğer $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ ise, o zaman

$$2^{\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa \cdot \lambda} = 2^{\lambda};$$

özel olarak $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$.

Şimdi $\mathbb{Z}$,**tamsayılar** topluluğu olsun. O zaman $\mathbb{Z} \approx \omega$, çünkü tamsayılar, sonsuz bir

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots$$

*Levy'ye [13] göre Cantor, bu teoremi 1892 yılında yayımladı.

listesinde yazılabilir. Ayrıca her tamsayı, ω kümesinin elemanları gibi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu göstermek için, eğer a ile b, herhangi iki kümeyse, o zaman

$$(a, b)$$

sıralı ikilisi (*ordered pair*), $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ kümesi olarak tanımlanır.* O zaman $n \in \omega$ ve $n > 0$ ise, o zaman $-n$ tamsayısı, $(0, n)$ olarak tanımlanabilir.

Başka yöntemle $\mathbb{Z}$ topluluğunun her r elemanını,

$$\{(x, y) \in \omega \times \omega \colon x = y + r\}$$

olarak tanımlanabiliriz. Bu tanıma göre $\mathbb{Z}$ topluluğunun her elemanı, bir **denklik sınıfıdır.** Aslında $\omega \times \omega$ çarpımında öyle bir E **denklik bağıntısı** vardır ki

$$(a, b)\ E\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c,$$

ve $\mathbb{Z}$ topluluğu, $(\omega \times \omega)/E$ bölümü olarak tanımlanabilir.

Öyleyse $\mathbb{Z}$ topluluğu, bir sınıftır. O zaman Yerleştirme Aksiyomuna göre $\mathbb{Z}$, bir küme olmalı, çünkü $\mathbb{Z} \approx \omega$.

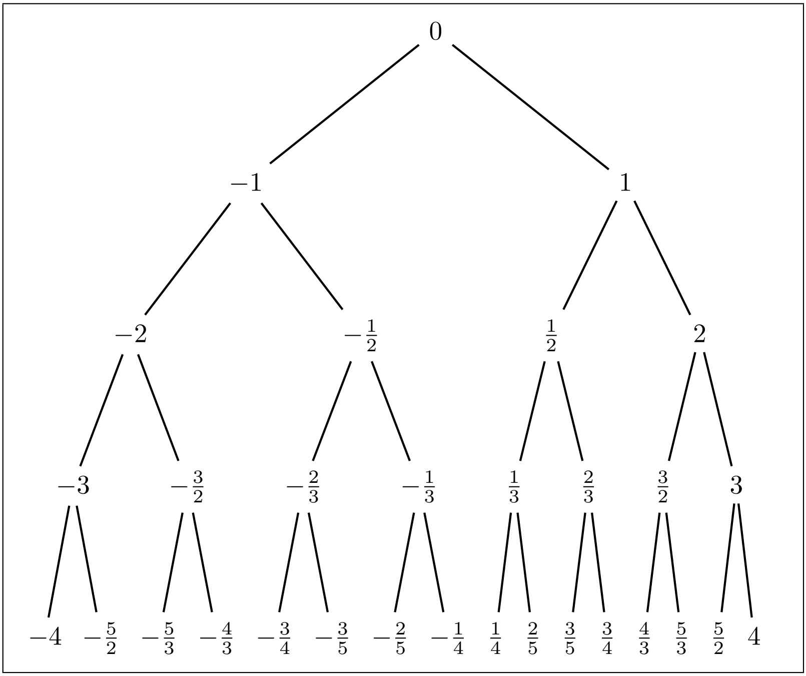
Benzer şekilde $\mathbb{Q}$**kesirli sayılar** topluluğu, öyle bir $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/F$ bölümüdür ki

$$(a, b)\ F\ (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Aslında $\mathbb{Q} \approx \omega$, çünkü kesirli sayılar, 1.1 numaralı şekildeki "Stern–Brocot ağacı" olarak, ve ondan sonra bir liste olarak, yazılabilir.

Şimdi $\mathbb{R}$,**gerçel sayılar** topluluğu olsun. Her kesirli sayı, gerçel sayı olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki farklı gerçel sayının arasında bir

*Bu, Kuratowski'nin tanımıdır [12]. Daha önce, Wiener [27] daha karmaşık bir tanım verdi.



Şekil 1.1: Stern–Brocot Ağacı

kesirli sayı vardır. O zaman $\mathbb{R}$ topluluğundan $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ kuvvet kümesine giden öyle bir h göndermesi vardır ki her a gerçel sayısı için

$$h(a) = \{x \in \mathbb{Q} \colon x < a\},$$

ve bu gönderme, birebirdir. Öyleyse a sayısı, $h(a)$ kümesi olarak düşünülebilir, ve $\mathbb{R}$, bir kümedir. Ayrıca

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathscr{P}(\omega) \qquad \text{ve} \qquad \mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}.$$

Örneğin

$$\mathscr{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$$

çünkü ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathscr{P}(\omega)$ kümesine giden bir

$$f \mapsto \{x \in \omega \colon f(x) = 1\}$$

eşlemesi vardır, ve ayrıca ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden bir birebir

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(k)}{3^{k+1}}$$

göndermesi vardır. Sonuç olarak, **Schröder–Bernstein Teoremine** göre

$$\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega),$$

çünkü bu teoreme göre tüm a ile b kümeleri için

$$a \preccurlyeq b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Şimdi Cantor'un Teoreminden $\omega \prec \mathbb{R}$. Özel olarak öyle bir α olacak ki $\alpha > 0$ ve $\mathbb{R} \approx \aleph_\alpha$. Ama α ordinalinin 1 olup olmadığını bilmiyoruz. **Kontinü Hipotezine** (*Continuum Hypothesis*) göre $\alpha = 1$, yani $\omega \preccurlyeq a \prec \mathscr{P}(\omega)$ ise $a \approx \omega$. **Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezine** (*Generalized Continuum Hypothesis*) göre her sonsuz b kümesi için $b \preccurlyeq c \prec \mathscr{P}(b)$ ise $b \approx c$.

Seçim Aksiyomu hariç kümeler kuramının kullanacağımız aksiyomları, *Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.* Aslında Zermelo'nun verdiği aksiyomlar [28], aşağıdadır.

I. *Uzama* (32 numaralı sayfada).
II. **Temel Kümeler** (*Elementary Sets*): $\varnothing$, $\{a\}$, ve $\{a, b\}$ toplulukları, kümedir.
III. Ayırma (16 numaralı sayfada).

IV. Kuvvet Kümesi (17 numaralı sayfada).
V. Bileşim (15 numaralı sayfada).
VI. Seçim (15 numaralı sayfada).
VII. Sonsuzluk (11 numaralı sayfada).

(9 numaralı sayfadaki Bitiştirme Aksiyomumuz, Zermelo'nun II. ve V. aksiyomları tarafından gerektirilir. Ters olarak Bitiştirme ve Boş Küme Aksiyomlarımız, Zermelo'nun II. aksiyomunu gerektirir.) Sonra iki aksiyom daha verildi:

VIII. Yerleştirme (14 numaralı sayfada).
IX. **Temellendirme** (*Foundation* [22]): Her boş olmayan a kümesinin öyle bir b elemanı vardır ki $a \cap b = \varnothing$ (35 numaralı sayfaya bakın).

I–V ile VII–IX numaralı aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.**

Birkaç tane kısaltmalar kullanılır:

$$\begin{aligned}
\text{AC} &= \text{Seçim Aksiyomu},\\
\text{ZF} &= \text{Zermelo–Fraenkel Aksiyomları},\\
\text{ZFC} &= \text{Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıyla Seçim Aksiyomu},\\
\text{KH} &= \text{Kontinü Hipotezi},\\
\text{GKH} &= \text{Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi}.
\end{aligned}$$

O zaman

$$\text{ZFC} = \text{ZF} + \text{AC}.$$

Gödel'in kanıtladığı teoreme göre ZF **tutarlıysa** (yani ondan bir çelişki çıkmazsa), o zaman ZFC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca ZFC aksiyomlarıyla GKH tutarlıdır [9, 10]. Sierpiński [21],

$$\text{ZF} + \text{GKH} \Rightarrow \text{AC}$$

gerektirmesinin gösterdi.* Cohen'in [5] kanıtladığı teoreme göre ZF tutarlıysa, o zaman ZF + ¬AC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca ZFC+¬KH tutarlıdır. Sierpiński'nin teoremi, aşağıdaki 101 numaralı teorem olacaktır; Gödel'in ve Cohen'in teoremlerini kanıtlamayacağız.

*Sierpiński'ye göre 1926 yılında Lindenbaum ve Tarski, bu gerektirmesini ilan ettiler, ama kanıtını vermediler.

2 Mantık

2.1 Formüller

Formüllerde kullanacağımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, …; x_0, x_1, x_2, …;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, …; a_0, a_1, a_2, …;*
3) **ikili bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;†
4) bir **birli bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).‡

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, özyinelidir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.

---

*Bilinen değerler için Latin alfabesinin başlangıcından harflerin kullanılışı, ve bilinmeyen değerler için Latin alfabesinin sonundan harflerin kullanılışı, Descartes'te [7] görünür.

†Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\rightarrow$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır. Bunları kalemle yazmak daha kolaydır. Ama bu notlarda, $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ ifadesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına gittiğinin anlamına gelecek. Aşağıdaki 48 numaralı sayfaya bakın.

‡Yukarıdaki 9 numaralı sayfadaki dipnota bakın.

2. Eğer φ, bir formül ise, o zaman
$$\neg\varphi$$
ifadesi de bir formüldür.
3. Eğer φ ile ψ, iki formül ise, o zaman
$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$
ifadeleri de, formüldür.
4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman
$$\exists x\ \varphi, \qquad \forall x\ \varphi$$
ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi \wedge \psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **gerektirme** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 1. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem gerektirme, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, gerektirme değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, gerektirmedir.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bir şekilde birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki özyineli tanımı yapabiliriz. Bir değışkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir ikili bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

2.2 Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her *serbest* geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \land \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \lor \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \land \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \lor \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.
7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \land (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a kümesi için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane kısaltma daha kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\vec{x}$ listesini oluştu-rursa, o zaman formül

$$\varphi(\vec{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \vec{x}\ \varphi(\vec{x}), \qquad \exists \vec{x}\ \varphi(\vec{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\vec{a}$, uzunluğun $\vec{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\vec{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\vec{x})$ ile $\psi(\vec{x})$, iki formül ise, ve *sadece doğruluğun tanımını kullanarak*

$$\forall\vec{x}\ \big(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \psi(\vec{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*). Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\vec{a}$ sabit listesi için, *doğruluğun tanımına göre*

$$\varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \psi(\vec{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}
\varphi \lor \psi \text{ denktir } \neg(\neg\varphi \land \neg\psi),\\
\varphi \Rightarrow \psi \text{ denktir } \neg\varphi \lor \psi,\\
\varphi \Leftrightarrow \psi \text{ denktir } (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi),\\
\forall x\ \varphi \text{ denktir } \neg\exists x\ \neg\varphi.
\end{gathered}$$

Ama $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Rightarrow x \in y\big)$ ile $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\big)$, denk değildir.

Teorem 2.

1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 3.

1. *$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ denktir.*
2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman $\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ ile $\varphi \Rightarrow \forall x\ \psi$ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.

Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

2.3 Eşitlik

Yukarıdaki 14 numaralı sayfada dediğimiz gibi

$$t = u$$

ifadesi, $\forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u)$ formülünün kısaltması olarak kullanılabilir. Burada x, herhangi bir değişken olabilir, ama t ile u terimlerinden farklı olmalıdır. Örneğin $x = y$ ifadesi, $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün kısaltmasıdır, ama $\forall x\ (x \in x \Leftrightarrow x \in y)$ formülünün kısaltması değildir.

Tanıma göre

$$t = u \text{ denktir } \forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u).$$

O zaman

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \Leftrightarrow \forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \qquad (*)$$

cümlesi doğrudur. Yani tüm a ile b kümeleri için

$$a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$$

cümlesi doğrudur. Bu cümle, $\Leftrightarrow$ simgesinin tanımına göre, iki cümlenin birleşmesine denktir, ve bu cümleler,

$$a = b \Rightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b), \qquad \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b.$$

O zaman tüm a ile b kümeleri için, hem

$$\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

doğrudur, hem de, 3 numaralı teoreme göre, her c kümesi için,

$$a = b \wedge c \in a \Rightarrow c \in b$$

doğrudur.

Bizim için, $(*)$ cümlesinin doğruluğu, bir tanımdır. Yani, simgesi $\in$ olan **içerilme** bağıntısı, temel bir bağıntıdır, ama **eşitlik** bağıntısı, yukarıdaki $(*)$ cümlesini sağlayan bir $=$ bağıntısıdır.

Teorem 4. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = a, \qquad a = b \Rightarrow b = a, \qquad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Teoreme göre eşitlik bağıntısı, **dönüşlü** (*reflexive*), **simetrik** (*symmetric*), ve **geçişli** (*transitive*) bir bağıntıdır, yani bir **denklik bağıntısıdır** (*equivalence relation*).

Teoremin dolayısıyla $a = b \wedge b = c$ cümlesinin kısaltması olarak $a = b = c$ ifadesi yazılır; yani

$$a = b = c \text{ denktir } a = b \wedge b = c.$$

İlk resmi aksiyomumuz şu:

AKSİYOM 1 (Eşitlik). *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = b \wedge a \in c \Rightarrow b \in c$$

cümlesi doğrudur. Yani

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge x \in z \Rightarrow y \in z)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyomun başka biçimleri vardır, mesela:

1. Tüm a, b, ve c kümeleri için $a = b \Rightarrow a \in c \Rightarrow b \in c$.
2. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\, (a = b \Rightarrow a \in x \Rightarrow b \in x)$.
3. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\, (a = b \wedge a \in x \Rightarrow b \in x)$.
4. Tüm a ile b kümeleri için $a = b \Rightarrow \forall x\, (a \in x \Rightarrow b \in x)$.
5. $\forall x\, \forall y\, (x = y \Rightarrow \forall z\, (x \in z \Rightarrow y \in z))$.
6. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \Rightarrow x \in z \Rightarrow y \in z)$.

Alıştırma 2. $a = b \wedge \forall x\, (a \in x \Rightarrow b \in x)$ cümlesi, Eşitlik Aksiyomundan kanıtlanabilir mi?

Teorem 5. *Her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için*

$$a = b \wedge \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) \qquad (\dagger)$$

cümlesi doğrudur.

Kanıt. Formüllerin özyineli tanımı nedeni ile, *tümevarım* kullanabiliriz.

1. İlk olarak φ bölünemesin. Yani $\varphi(x)$, ya $c \in x$ veya $x \in c$ biçiminde olsun. O zaman (†) cümlesi, ya eşitliğin tanımından, ya da Eşitlik Aksiyomundan, doğrudur.

2. Eğer φ, ya ψ ya da χ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge (\psi(a) \wedge \chi(a))$ doğru olsun. O zaman hem $a = b \wedge \psi(a)$ hem $a = b \wedge \chi(a)$ doğru olmalı. Sonuç olarak varsayımımızdan hem $\psi(b)$ hem $\chi(b)$ doğru olmalı, yani $\psi(b) \wedge \chi(b)$ doğru olmalı. Öyleyse φ, $\psi \wedge \chi$ ise (†) doğrudur.

3. Son olarak, tüm c için $\varphi(x)$, $\psi(x, c)$ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge \exists y\ \varphi(a, y)$ doğru olsun. O zaman bir c için $a = b \wedge \varphi(a, c)$ doğru olmalı, dolayısıyla $\varphi(b, c)$ doğru olmalı. Sonuç olarak $\exists y\ \varphi(b, y)$ doğrudur. Öyleyse $\varphi(x)$, $\exists y\ \varphi(x, y)$ ise (†) doğrudur. □

Kitapların çoğunda hem $\in$ hem $=$, temel bağıntıdır, ve yukarıdaki 30 numaralı sayfadaki $(*)$ cümlesi, tanım değil, **Uzama Aksiyomudur*** (*Axiom of Extensionality* [28]). Bu kitaplarda her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için (†) cümlesi, bir **mantıksal aksiyomdır.**

2.4 Sınıflar

Bir $\varphi(x)$ formülü ve bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa a kümesi, $\varphi(x)$ formülünü **sağlar** (*satisfies*). O zaman φ formülünü sağlayan kümeler topluluğu vardır. Bu topluluk

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

*Veya **Küme Eşitliği Aksiyomu** [16].

olarak yazılır, ve ona φ **tarafından tanımlanmış sınıf** (*class defined by* φ) denir.

Yukarıdaki 23 numaralı sayfadaki tanıma göre bir değişken veya sabit, bir *terimdir.* Daha kesinlikle bir **küme terimidir** (*set term*). Şimdi, eğer x değişkeni, φ formülünün serbest bir değişkeniyse, φ formülünü

$$\varphi(\dots x \dots)$$

olarak yazarız. O zaman

$$\{x \colon \varphi(\dots x \dots)\}$$

ifadesi, bir **sınıf terimi** (*class term*) olacak. Sınıf terimlerini formüllerde kullanabiliriz, ama şimdilik, sadece $\in$ işaretinin sağında. Bir x değişkeninin bir $\varphi(\dots y \dots)$ formülündeki serbest geçişi, bir

$$t \in \{y \colon \varphi(\dots y \dots)\}$$

formülünde (hâlâ) serbesttir. Eğer x değişkeninin $\varphi(\dots x \dots)$ formülünündeki her serbest geçişinin yerine a sabitini koyarsak $\varphi(\dots a \dots)$ formülü çıkar. Şimdi tanıma göre

$$a \in \{x \colon \varphi(\dots x \dots)\} \text{ denktir } \varphi(\dots a \dots).$$

Bir sabit veya bir $\{x \colon \varphi(x)\}$ sınıf terimi, **kapalı** (*closed*) bir terimdir. Kapalı bir terim, bir kümenin veya bir sınıfın adıdır. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ gibi büyük siyah harfleri kapalı sınıf terimleri olarak kullanacağız. O zaman 30 numaralı sayfadaki tanıma göre

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$a = \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$\boldsymbol{B} = a \text{ denktir } a = \boldsymbol{B}.$$

Sonuç olarak

$$a = \{x \colon x \in a\}.$$

Yani her küme, bir sınıfa eşittır. Ama tersi yanlıştır; bildiğimiz gibi bazı sınıflar hiçbir kümeye eşit değildir:

Teorem 6 (Russell Paradoksu [20])**.** *$\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, hiçbir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. Bu teoremi zaten 13 numaralı sayfada kanıtladık. Şimdi bir kanıt daha vereceğiz. $x \notin x$ formülü tarafından tanımlanmış sınıf, $\boldsymbol{A}$ olsun. O zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow b \notin b$$

doğrudur. O zaman $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in b)$ cümlesi yanlıştır. Eşitliğin tanımına göre $b \neq \boldsymbol{A}$. □

Şimdi sınıf terimlerini $\in$ işaretinin solunda kullanabiliriz, ama çıkan cümle doğru olacağı için sınıf terimi bir kümeyi adlandırmalı:

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{B} \text{ denktir } \exists x\ (x = \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}).$$

Eğer $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$ doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfının **altsınıfıdır** (*subclass*), ve $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ifadesini yazarız. Yani

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Teorem 7.

1. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \textit{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

2. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$$

cümlesi (mantığa göre) doğrudur.

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayın.

2.5 İşlemler

Sınıflarla birkaç tane ikili işlem vardır. Önce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} &= \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}\}, \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} &= \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}\}. \end{aligned}$$

Bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **kesişimi** (*intersection*) ve **bileşimi** (*union*).

Teorem 8. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}, \\ \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}, \\ \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}), \\ \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}). \end{aligned}$$

Kanıt. $x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}$ denktir $x \in \boldsymbol{B} \wedge x \in \boldsymbol{A}$, vesaire. □

Ondan sonra

$$\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} = \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının $\boldsymbol{B}$ sınıfından **farkıdır** (*difference*). O zaman

$$\boldsymbol{A} \mathbin{\triangle} \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{A}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A});$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **simetrik farkıdır** (*symmetric difference*).

7 numaralı teorem sayesinde bir $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$ cümlesinin yerine

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$$

ifadesini yazabiliriz. Örneğin sonraki teoremi yazabiliriz.

Teorem 9. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 4. Teoremi kanıtlayın.

Sınıflarda bir *birli* işlem vardır:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} = \{x \colon x \notin \boldsymbol{A}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının **tümleyenidir** (*complement*).

Teorem 10 (De Morgan Kuralları*). *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cup \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}, \qquad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cap \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}.$$

Alıştırma 5. Teoremi kanıtlayın.

*Aslında bu kuralları, Augustus De Morgan'ın (1806–71) eserlerinde bulamadım, ama Venedikli Paulus'un (∼1369–1429) eserlerinde [1, 31.35] buldum.

İçerilme bağıntısını kullanarak birkaç tane birli işlemi daha tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}\bigcap \boldsymbol{A} &= \{x \colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\},\\ \bigcup \boldsymbol{A} &= \{x \colon \exists y\ (x \in y \land y \in \boldsymbol{A})\},\\ \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) &= \{x \colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})\}\\ &= \{x \colon x \subseteq \boldsymbol{A}\};\end{aligned}$$

bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ sınıfının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **kuvvet sınıfıdır** (*power class*).

Teorem 11. *Eğer $a \in \boldsymbol{B}$ ise*

$$\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın.

Son olarak 14 numaralı sayfadaki gibi

$$\mathbf{V} = \{x \colon x = x\},$$

ve

$$\begin{aligned}\varnothing &= \{x \colon x \neq x\},\\ \{a\} &= \{x \colon x = a\},\\ \{a, b\} &= \{x \colon x = a \lor x = b\},\\ \{a, b, c\} &= \{x \colon x = a \lor x = b \lor x = c\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Buradaki $\varnothing$ sınıfı, **boş sınıftır.**

Teorem 12.

$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}, \qquad \bigcup \varnothing = \varnothing.$$

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın.*

Bu altbölümün

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}}, & & \varnothing, \\ \boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}, & \bigcap\boldsymbol{A}, & \mathbf{V}, & \{a\}, \\ \boldsymbol{A}\mathbin{\triangle}\boldsymbol{B}, & \bigcup\boldsymbol{A}, & & \{a,b\}, \\ \boldsymbol{A}\smallsetminus\boldsymbol{B}, & \mathscr{P}(\boldsymbol{A}), & & \{a,b,c\} \end{array}$$

ifadeleri, *sınıf* terimidir. Her $\boldsymbol{A}$ veya $\boldsymbol{B}$ teriminin yerine başka bir terimi koyabiliriz. Zaten bu şekilde $(\boldsymbol{A}\smallsetminus\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{B}\smallsetminus\boldsymbol{A})$ gibi ifadeleri yazdık. Fakat şimdilik küçük harfler hariç, küme terimlerimiz yoktur. Bu durum hemen değişecek.

*Bazı kitaplarda $\boldsymbol{A}$ boş ise $\bigcap\boldsymbol{A}$ kesişimi tanımlanmaz. Örneğin [16, s. 51 & 285] kaynağına bakın.

3 Doğal Sayılar

3.1 Doğal sayılar kümesi

Doğruluğun 26 numaralı sayfadaki tanımına göre $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru mudur? Yani $\exists x\ \forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi doğru mudur? Eğer bir b kümesi için $b = a$ cümlesi, yani $\forall y\ (y \in b \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi, doğruysa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi de doğrudur. Aslında 4 numaralı teoreme göre $a = a$ cümlesi doğru, değil mi? O halde $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru olmalı.

Ama bu iddia pek doğru değildir. Bir a kümesi varsa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi doğrudur. Bir küme varsa, bu kümeye a denilebilir, ve sonuç olarak $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru oluyor. Bu ana kadar hiç kesin bir kümemiz olmadı. Ama kümeler olmalı, ve birini zaten biliyoruz:

AKSİYOM 2 (Boş Küme)**.** *$\varnothing$ boş sınıf, bir kümedir:*

$$\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde $\varnothing$ işareti, bir küme terimidir. Bu yüzden $\{\varnothing\}$ ve $\{\varnothing, a\}$ gibi sınıf terimlerini yazabiliriz. Bu terimler de, küme terimi olacak. Boş küme gibi bilinen kümelerden yeni kümeler oluşturulabilir:

AKSİYOM 3 (Bitiştirme)**.** *Tüm a ile b kümeleri için $a \cup \{b\}$ sınıfı, bir kümedir:*

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall w \, (w \in z \Leftrightarrow w \in x \lor w = y)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 13 (Temel Kümeler)**.** *Tüm a ile b kümeleri için $\{a\}$ ile $\{a, b\}$ sınıfları, kümedir:*

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \Leftrightarrow z = x),$$
$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall w \, (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$$

cümleleri doğrudur.

Kanıt. Boş Küme ile Bitiştirme Aksiyomlarına göre $\{a\}$ sınıfı, $\varnothing \cup \{a\}$ kümesine eşittir, ve $\{a, b\}$ sınıfı, $\{a\} \cup \{b\}$ kümesine eşittir. □

Özel olarak her a kümesi için $a \cup \{a\}$ bir kümedir. Bu son küme, a' olsun. Yani her a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\}$$

olsun. a' kümesi, a kümesinin **ardılıdır** (*successor*). Sık sık ardılları alarak

$$\varnothing, \qquad \varnothing', \qquad \varnothing'', \qquad \varnothing''', \qquad \ldots$$

küme dizisini oluşturabiliriz. Bu dizi,

$$\varnothing, \qquad \{\varnothing\}, \qquad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}, \qquad \ldots$$

Yukarıdaki 10 numaralı sayfadaki gibi bu kümeler,

$$0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad \ldots$$

doğal sayıları olacak. Elemanları *tüm* doğal sayılar olan bir sınıf var mıdır?

Doğal sayıların *topluluğunun* iki özelliği vardır:

1. 0, bu topluluktadır.
2. Eğer a, bu topluluktaysa, $a \cup \{a\}$ kümesi de, bu topluluktadır.

Bu özellikleri olan *kümeler,* bir sınıf oluşturur. Yani

$$\mathbf{\Omega} = \{x \colon 0 \in x \wedge \forall y \ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{\Omega}$ sınıfı vardır.

Teorem 14.

1. $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
2. *Eğer* $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, o zaman* $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
3. *Eğer* $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, ve* a*,*

$$0 \in a, \qquad \forall x \ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$.

Kanıt. 1. Eğer $a \in \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman $0 \in a$. Sonuç olarak $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

2. $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ olsun. O zaman $\mathbf{\Omega}$ sınıfının her b elemanı için $a \in b$. Ayrıca $b \in \mathbf{\Omega}$ yüzünden $\forall y \ (y \in b \Rightarrow y \cup \{y\} \in b)$ cümlesi doğrudur. O zaman $a \cup \{a\} \in b$ olmalı. Sonuç olarak $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

3. $0 \in a$ ve $\forall x \ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$ doğru olsun. O zaman $a \in \mathbf{\Omega}$. Bu yüzden 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \mathbf{\Omega} \subseteq a$ olmalı. Eğer ayrıca $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman 7 numaralı teoreme göre $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$. □

Bu teoreme rağmen eğer

$$\boldsymbol{A} \subseteq \bigcap \boldsymbol{\Omega}, \qquad 0 \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \boldsymbol{A}) \qquad (*)$$

ise $\boldsymbol{A} = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Çünkü 12 numaralı teoreme göre

$$\bigcap 0 = \mathbf{V}$$

(yani $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$), ve $\boldsymbol{\Omega}$ sınıfının boş olmadığını şimdilik bilmiyoruz. Bu durumu hemen değiştirebiliriz:

AKSİYOM 4 (Sonsuzluk)**.** $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$*, yani*

$$\exists x\ \big(0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Hâlâ yukarıdaki $(*)$ satırındaki varsayılarından $\boldsymbol{A} = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Bir tane aksiyomu daha kullanarak bunu sonuçlandırabiliriz:

AKSİYOM 5 (Ayırma)**.** *Bir kümenin her altsınıfı, bir kümedir, yani her $\varphi(x)$ formülü için*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Şimdi her a kümesi ve $\varphi(x)$ formülü için $\{x\colon x \in a \wedge \varphi(x)\}$ sınıfı, bir kümedir, ve bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır.

Teorem 15. *Bir sınıf boş değilse, kesişimi bir kümedir.*

Kanıt. $a \in \boldsymbol{B}$ olsun. 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a$. Ayırma Aksiyomuna göre $\bigcap \boldsymbol{B}$ kesişimi, bir küme olmalı. □

Özel olarak

$$\omega = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$$

eşitliğini sağlayan bir ω kümesi vardır. Bu kümenin elemanları, **von Neumann doğal sayılarıdır.** ω işareti, yeni bir küme terimidir. Bundan sonra $\boldsymbol{\Omega}$ sınıf terimini kullanmayacağız.

Şimdi 14 numaralı teoremi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

1. $0 \in \omega$.
2. Eğer $a \in \omega$ ise, o zaman $a' \in \omega$.
3. Eğer $a \subseteq \omega$ ise, ve a,

$$0 \in a, \qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x' \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \omega$.

Ayrıca her kümeninki gibi ω kümesinin de her altsınıfı, bir kümedir. Sonuç olarak ω kümesinin bazı özelliklerini **tümevarım** (*induction*) yöntemiyle kanıtlayabileceğiz.

Aslında bazen ω kümesinin iki özelliğininin daha kullanılması gerekecek. $\forall x\ x' \neq 0$ apaçıktır. Ama k ile m, doğal sayılar ise, ve $k' = m'$ ise, $k = m$ eşitliğini elde etmek, biraz daha zor olacak.

Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. O zaman $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. Bundan $k \in k$ cümlesini sonuçlandırmak istiyoruz.

Eğer bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı,

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})$$

cümlesini sağlarsa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **geçişli** (*transitive*) denir. Öyleyse her geçişli sınıfın her elemanı, sınıfın bir altkümesidir de.

Teorem 16. *ω kümesinin her elemanı, geçişlidir.*

Kanıt. a, ω kümesinin geçişli elemanları kümesi olsun. Yani

$$\begin{aligned} a &= \{x \in \omega \colon \forall y\, \forall z\, (y \in x \wedge z \in y \Rightarrow z \in x)\} \\ &= \{x \in \omega \colon \forall y\, (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)\} \end{aligned}$$

olsun. O zaman $0 \in a$. *Tümevarım hipotezi* olarak $b \in a$ olsun. $b' \in a$ cümlesinin doğruluğunu göstereceğiz. $c \in b'$ olsun. Ya $c \in b$ ya da $c = b$. Eğer $c \in b$ ise, o zaman hipotezimize göre $c \subseteq b$. Her durumda $b \subseteq b'$. Öyleyse $c \subseteq b'$. Ama c, b' kümesinin herhangi bir elemanıdır. Sonuç olarak $b' \in a$. Tümevarımdan (yani 14 numaralı teoremin 43 numaralı sayfadaki biçiminden) $a = \omega$. □

Teorem 17. *ω kümesi, geçişlidir.*

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 9. $\{0, 1, \{1\}\}$ kümesinin geçişli olduğunu kanıtlayın.

Teorem 18. *ω kümesinin hiçbir elemanı, kendisini içermez.*

Kanıt. Tekrar tümevarımı kullanacağız. Çünkü boş kümenin hiçbir elemanı yok, $0 \notin 0$. Şimdi $a \in \omega$ ve $a \notin a$ olsun. Eğer $a' \in a'$ ise, ya $a' \in a$ ya da $a' = a$. Her durumda, geçen teoreme göre, $a' \subseteq a$, dolayısıyla $a \in a$ (çünkü $a \in a'$). Bu sonuç, varsayımımızla çelişir. O zaman $a' \notin a'$ olmalı. Tümevarımdan kanıtımız bitti. □

Teorem 19. *ω kümesinin tüm k ile m elemanları için $k' = m'$ ise $k = m$.*

Kanıt. Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. Dediğimiz gibi $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. 16 ile 18 numaralı teoremlere göre $k \in k$ ve $k \notin k$, bir çelişkidir. □

Şimdi, 14 numaralı teoremdekiler dahil, ω kümesinin beş tane özelliği vardır:

1. $0 \in \omega$.
2. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \in \omega)$.
3. $\forall x\ \big(x \subseteq \omega \land 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x) \Rightarrow x = \omega\big)$.
4. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \neq 0)$.
5. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x' = y' \Rightarrow x = y)$.

Bu özelliklerin önemi, 1887 yılında Dedekind [6, II, ¶71] tarafından, ve 1889 yılında Peano [17] tarafından, fark edilmiştir. Sık sık **Peano Aksiyomları,** bu özelliklere denir, ama **Dedekind–Peano Aksiyomları** de kullanılabilir. Aslında bizim için aksiyomlar değil, teoremdirler.

Peano Aksiyomlarından doğal sayıların tüm özellikleri elde edilebilir. Mesela *iyi sıralama* özelliği elde edilebilir. Aslında ω, içerilme ($\in$) bağıntısı tarafından iyi sıralanır. Ama bir bağıntı nedir?

3.2 Bağıntılar

Herhangi a ile b kümeleri için $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ kümesi (a, b) **sıralı ikilisi** (*ordered pair*) olarak yazılır. Yani*

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}.$$

Teorem 20. *Tüm a, b, c, ve d kümeleri için*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \land b = d$$

cümlesi doğrudur.

---

*∗ numaralı sayfadaki notta dediğimiz gibi bu tanım, Kuratowski'nin [12] 1921 yılında verdiği tanımdır.

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 11. $\{\{a,1\},\{b,2\}\} = \{\{c,1\},\{d,2\}\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ cümlesini kanıtlayın.*

Alıştırma 12. $\Big\{\{\{a\},0\},\{\{b\}\}\Big\} = \Big\{\{\{c\},0\},\{\{d\}\}\Big\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ cümlesini kanıtlayın.†

Şimdi her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için

$$\big\{z\colon \exists x\ \exists y\ \big(z = (x,y) \wedge \varphi(x,y)\big)\big\}$$

sınıfı,

$$\{(x,y)\colon \varphi(x,y)\}$$

olarak yazılabilir. Öyle bir sınıf, bir **ikili bağıntıdır** (*binary relation*).

Örneğin:

1. İçerilme bağıntısı, $\{(x,y)\colon x \in y\}$ sınıfıdır.
2. Eşitlik bağıntısı, $\{(x,y)\colon x = y\}$ sınıfıdır.

Aynı şekilde, eğer $\boldsymbol{R}$, bir ikili bağıntıysa, o zaman $(x,y) \in \boldsymbol{R}$ formülünün kısaltması olarak $x\ \boldsymbol{R}\ y$ ifadesini yazarız, yani

$$x\ \boldsymbol{R}\ y \text{ denktir } (x,y) \in \boldsymbol{R}.$$

$\boldsymbol{R}$ bağıntısının **ters bağıntısı** veya **tersi** (*converse*),

$$\{(y,x)\colon x\ \boldsymbol{R}\ y\}$$

---

*Heijenoort'a [25, s. 224] göre bu cümlede, Hausdorff'un 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanım bulunmuştur.

†Bu cümlede, Wiener'in [27] 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanım bulunmuştur.

bağıntısıdır. Bu bağıntı, $\breve{\boldsymbol{R}}$ olarak yazılır; yani

$$x \mathrel{\breve{\boldsymbol{R}}} y \text{ denktir } y \mathrel{\boldsymbol{R}} x.$$

$\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, iki sınıf ise, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}\};$$

bu bağıntı, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **çarpımıdır** (*product*). Eğer $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir bağıntıdır.

Sınıflar arasındaki bir bağıntının kendisi, bir sınıftır. Sıralı ikililerin tanımı, sınıflarla bağıntıları birleştirir. Benzer şekilde Newton'un Ağırlık Kanunu, Ay'ın Yerin etrafında dönüşü ile nesnelerin yere düşüşünü birleştirir.

Eğer $\boldsymbol{F}$,

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x \mathrel{\boldsymbol{F}} y \wedge x \mathrel{\boldsymbol{F}} z \Rightarrow y = z) \tag{†}$$

cümlesini sağlayan bir ikili bağıntıysa, o zaman

(1) $\boldsymbol{F}$ bağıntısına **gönderme** denir;
(2) $\{x \colon \exists y \;\, x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **tanım sınıfı** (*domain*) denir;
(3) $\{y \colon \exists x \; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **değer sınıfı** (*range*) denir.*

Bu durumda $x \mathrel{\boldsymbol{F}} y$ formülünün yerine

$$y = \boldsymbol{F}(x)$$

*Bu notlarda bir gönderme, sadece (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısıdır. Fakat bazı kaynaklarda (örneğin [16, s. 70] kaynağında) bir gönderme veya fonksiyon, (1) (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısı, (2) $\{y \colon \exists x \;\, x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfına eşit bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı, ve (3) $\{y \colon \exists x \; x \mathrel{\boldsymbol{F}} y\}$ sınıfını *kapsayan* bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından oluşturulmuş bir üçlüdür. O halde (aşağıdaki 48 numaralı sayfadaki gibi) $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi yazılır. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$ sınıfına *göndermenin değer sınıfı* (veya *varış sınıfı*) denilebilir. İngilizcede *codomain* kullanılır. Ama buradaki $\boldsymbol{B}$ sınıfı, sadece $\boldsymbol{F}$ sınıfı tarafından belirtilmez, ve buna hiçbir ad vermiyoruz.

ifadesini yazarız, çünkü $a \boldsymbol{F} b$ doğruysa, o zaman b kümesi, a kümesi tarafından belirtilir. Buradaki $\boldsymbol{F}(x)$ ifadesi, yeni bir küme terimidir. O zaman $\boldsymbol{F}$,

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

olarak yazılabilir; yani

$$(x \mapsto \boldsymbol{F}(x)) = \{(x, y) \colon y = \boldsymbol{F}(x)\}.$$

Örneğin:

1. Her a kümesi için, $x \mapsto a$ **sabit gönderme** (*constant function*) vardır, özel olarak $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, ..., $x \mapsto \omega$, ...

2. $x \mapsto x$, **özdeşlik göndermesidir** (*identity function*).

3. $x \mapsto x'$, **ardıl göndermesi** (*successor function*) veya **ardıllamadır** (*succession*).

Eğer $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı $\boldsymbol{A}$ ise, ve değer sınıfını, bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından kapsanırsa, o zaman

$$\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Yani bu ifade,

$$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, (x\, \boldsymbol{F}\, y \Rightarrow x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}) \\ &\qquad \wedge \forall x\, \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \exists y\, (x\, \boldsymbol{F}\, y)\big) \\ &\qquad\qquad \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (x\, \boldsymbol{F}\, y \wedge x\, \boldsymbol{F}\, z \Rightarrow y = z) \end{aligned}$$

cümlesinin kısaltmasıdır.

3.3 Sıralamalar

Sıralama (*ordering*),

$$\forall x \neg x \,\boldsymbol{R}\, x, \qquad \forall x \,\forall y \,\forall z \,(x \,\boldsymbol{R}\, y \wedge y \,\boldsymbol{R}\, z \Rightarrow x \,\boldsymbol{R}\, z)$$

cümlelerini sağlayan bir $\boldsymbol{R}$ ikili bağıntısıdır. Örneğin yukaradaki 20 numaralı sayfada bahsedildiği ve aşağıdaki 93 numaralı sayfada kanıtlanacak Schröder–Bernstein Teoremine göre $\prec$ bağıntısı, bir sıralama olacaktır. Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

olsun; o zaman $\subset$ bağıntısı da, bir sıralamadır.

Belki bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısı, bir sıralama değildir, ama bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\boldsymbol{R} \cap (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})$$

kesişimi, bir sıralama olabilir. O zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanır. Örneğin $\in$, sıralama değil; ama 16 ile 18 numaralı teoremlere göre $\in$ bağıntısı ω kümesini sıralar.

Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfı, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanırsa, ve üstelik

$$\forall x \,\forall y \,(x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge x \neq y \Rightarrow x \,\boldsymbol{R}\, y \vee y \,\boldsymbol{R}\, x)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir **doğrusal** (*linear*) sıralamasıdır.

Teorem 21. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının doğrusal sıralamasıdır.*

Alıştırma 13. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının doğrusal sıralamasıysa, ve üstelik $\boldsymbol{A}$ sınıfının her boş olmayan b altkümesinin $\boldsymbol{R}$ sıralamasına göre **en küçük** (*least*) elemanı varsa, yani

$$\forall x \left(x \subseteq \boldsymbol{A} \land x \neq 0 \Rightarrow \exists y \left(y \in x \land \forall z \left(z \in x \smallsetminus \{y\} \Rightarrow y \mathrel{\boldsymbol{R}} z\right)\right)\right)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından **iyi sıralanır** (*well-ordered*).

Teorem 22. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının iyi sıralamasıdır.*

Alıştırma 14. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 23. *ω kümesinde $\in$ ile $\subset$, aynı bağıntıdır, yani*

$$\forall x\, \forall y \left(x \in \omega \land y \in \omega \Rightarrow (x \in y \Leftrightarrow x \subset y)\right)$$

doğrudur.

Kanıt. k ile m, doğal sayılar olsun. 16 ile 18 numaralı teoremlere göre $k \in m$ ise $k \subset m$.

Şimdi $k \subset m$ olsun. Önceki teoreme göre $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. O zaman $\ell \in m$, dolayısıyla $\ell \subseteq m$. Ayrıca $a \in \ell$ ise $a \in k$ olmalı (çünkü $a \in m$, ama içerilmeye göre ℓ, $m \smallsetminus k$ farkının en küçük elemanıdır). Öyleyse $\ell \subseteq k$. Ama $b \in k$ ise $b \in m$, dolayısıyla $\ell \in b$ veya $\ell = b$ veya $b \in \ell$. Ancak $\ell \notin b$ ve $\ell \neq b$ (çünkü $b \subseteq k$ ve $\ell \notin k$). Öyleyse $b \in \ell$. Sonuç olarak $k \subseteq \ell$. Fakat $\ell \subseteq k$. O zaman $k = \ell$, dolayısıyla $k \in m$. □

Teorem 24. *ω, içerilme tarafından iyi sıralanır.*

Kanıt. ω kümesinde $m \notin k$ ve $m \neq k$ olsun. Yani (önceki teoremi kullanarak) $m \not\subseteq k$ olsun. O zaman $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. Geçen kanıttaki gibi $\ell \subseteq k$, yani $\ell \in k$ veya $\ell = k$. Fakat

$\ell \notin k$. Sonuç olarak $\ell = k$, dolayısıyla $k \in m$. Öyleyse içerilme, ω kümesinin bir doğrusal sıralamasıdır.

Ayrıca $a \subseteq \omega$ ve $n \in a$ ise, ya n a kümesinin en küçük elemanıdır, ya da $n \cap a$ kesişimi boş değildir. Son durumda bu kesişimin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, a kümesinin en küçük elemanıdır. □

3.4 Ordinaller

Önceki iki teoremin kanıtları, doğal sayıların sadece geçişlilik ve iyi sıralama özelliklerini kullanmaktadır. Bir **ordinal,**

1) geçişli ve
2) $\in$ tarafından iyi sıralanmış

bir kümedir. Ordinaller,

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluşturur. O zaman 16 ve 22 numaralı teoremlere göre

$$\omega \subseteq \mathbf{ON}.$$

Üstelik 17 ve 24 numaralı teoremlere göre

$$\omega \in \mathbf{ON}.$$

Dolayısıyla $\omega' \in \mathbf{ON}$.

Teorem 25. *Her ordinalin ardılı, bir ordinaldir.*

Alıştırma 15. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 26. **ON** *sınıfında* $\in$ *ve* $\subset$, *aynı bağıntıdır.*

Alıştırma 16. 23 numaralı teoremin kanıtını kullanarak bu teoremi kanıtlayın.

Teorem 27 (Burali-Forti Paradoksu [3]). **ON** *geçişlidir, ve* $\in$ *tarafından iyi sıralanır.*

Kanıt. α bir ordinal olsun, ve $\beta \in \alpha$ olsun. O zaman $\beta \subseteq \alpha$. Bu durumda β, $\in$ tarafından iyi sıralanır. Şimdi $\gamma \in \beta$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, dolayısıyla $\gamma \subseteq \alpha$. O zaman $\delta \in \gamma$ ise $\delta \in \alpha$. α, $\in$ tarafından iyi sıralandığından, $\delta \in \beta$, çünkü β, γ, ve δ, hepsi α kümesindedir, ve $\delta \in \gamma$, ve $\gamma \in \beta$. Kısaca $\delta \in \gamma \Rightarrow \delta \in \beta$, yani $\gamma \subseteq \beta$. Ama γ, β kümesinin herhangi bir elemanıdır. Öyleyse β, geçişlidir. Sonuç olarak β, bir ordinaldir. Ama β, α ordinalinin herhangi bir elemanıdır. O zaman $\alpha \subseteq \mathbf{ON}$. Ve α, herhangi bir ordinaldir. Öyleyse **ON** geçişlidir.

Ordinaller sınıfının $\in$ tarafından iyi sıralandığı kanıt, 24 numaralı teoremin kanıtı ile aynıdır. □

15 numaralı sayfada dediğimiz gibi **ON** bir küme olsaydı, $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$, ki bu saçmadır (çünkü **ON** sınıfında $\in$ dönüşsüzdür).

α, β, γ, δ, θ, ve ι küçük Yunan harfleri, her zaman *ordinal* sabit olacaktır. Yani

$$\alpha \in \mathbf{ON},$$

vesaire. Ayrıca 26 numaralı teorem sayesinde $\alpha \in \beta$ veya $\alpha \subset \beta$ formülünün yerine

$$\alpha < \beta$$

ifadesini yazabiliriz. ξ Yunan harfi, ordinal değişken olacaktır. Özel olarak

$$\{\xi \colon \varphi(\xi)\} = \{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Teorem 28. $\alpha' = \min\{\xi \colon \alpha < \xi\}$, *yani her ordinal için daha büyük ordinaller sınıfının en küçük elemanı, ordinalin ardılıdır.*

Alıştırma 17. Teoremi kanıtlayın.

Eğer α boş veya ardıl değilse, ve $\beta \in \alpha$ ise, o zaman $\beta' < \alpha$ olmalıdır. Bu durumda, α ordinaline **limit** denir. Örneğin ω, bir limittir.

Teorem 29. *ω, hem limit olmayan hem limit içermeyen ordinaller sınıfıdır. Yani*

$$\omega = \{\xi\colon (\xi = 0 \lor \exists y\ y' = \xi) \land \forall z\ (z \in \xi \Rightarrow z = 0 \lor \exists y\ y' = z)\}. \quad (\ddagger)$$

Kanıt. Tümevarımla her doğal sayı, ne limittir ne limit içerir. Öte yandan, eğer α' ardılı, hiç limit içermezse, o zaman α ordinal de, hiç limit içermez. Öyleyse en küçük limit olmayan, limit içermeyen, doğal sayı olmayan ordinal yoktur. O zaman hiç öyle ordinaller yoktur. □

Bu teoremin kanıtı, Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmaz, dolayısıyla (‡) eşitliği, ω sınıfının tanımı olarak kullanılabilir. O halde 45 numaralı sayfadaki Peano Aksiyomları yeniden kanıtlanmalıdır.

3.5 Özyineleme

ω kümesinde toplama, bir **ikili işlem** olacak, yani $\omega \times \omega$ çarpımından ω kümesine giden bir gönderme. Bu işlem,

$$(x, y) \mapsto x + y$$

olarak yazılır. O zaman her k doğal sayısı için bir $x \mapsto k + x$ **birli işlemi** olacaktır. Bu işlemin özelliklerinden ikisi,

$$k + 0 = k, \qquad \forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow k + x' = (k + x)'\big) \qquad (\S)$$

olacaktır. Aslında ω kümesindeki birli işlemlerden en çok birinin bu özellikleri vardır. Çünkü $f\colon \omega \to \omega$, $f(0) = k$, ve $\forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow$

$f(x') = f(x)')$ olsun. O zaman $f(0) = k + 0$, ve $f(m) = k + m$ ise $f(m') = f(m)' = (k+m)' = k+m'$. Tümevarımla her n doğal sayısı için $f(n) = k + n$.

Neden ω kümesindeki birli işlemlerden *en az* birinin (§) satırındaki özellikleri vardır? $k = 0$ durumunda her n için $k + n = n$ olsun. O zaman $k+0 = 0$, ve $k+m' = m' = (k+m)'$. Üstelik $k = \ell$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi varsa $\ell' + n = (\ell + n)'$ olsun. O zaman $\ell' + 0 = (\ell + 0)' = \ell'$, ve $\ell' + m' = (\ell + m')' = (\ell + m)'' = (\ell' + m)'$. Yani $k = \ell'$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi vardır.

Tümevarımla ω kümesindeki her k için (§) satırındaki gibi $x \mapsto k+x$ işleminin olduğu sonucuna varabilir miyiz? Tümevarımla bir *kümenin* ω kümesine eşit olduğu kanıtlanabilir. Şimdiki durumda hangi küme, ω kümesine eşit olmalıdır? Mümkünse a, ω kümesinin öyle k elemanları tarafından oluşturulsun ki (§) satırındaki özelliklerini sağlayan bir işlem olsun. O halde gösterdiğimiz gibi $a = \omega$ olmalıdır. Ama öyle bir a kümesi var mıdır? Hangi formül, bu kümeyi tanımlayabilir?

14 ve 61 numaralı sayfalardaki Yerleştirme Aksiyomuna göre bir kümede birli bir işlemin kendisi, bir kümedir. O halde istediğimiz a kümesi tanımlanabilir, dolayısıyla ω kümesindeki toplamanın kendisi tanımlanabilir. Aslında (§) satırındaki özellikleri, toplamanın **özyineli tanımını** (*recursive definition*) sağlar.

Benzer şekilde her k doğal sayısı için

$$k \cdot 0 = 0, \qquad \forall x \, (x \in \omega \Rightarrow k \cdot x' = k \cdot x + k) \qquad (\P)$$

özellikleri olan $x \mapsto k \cdot x$ işlemi vardır. (Burada tabii ki $k \cdot x + k = (k \cdot x) + k$.) Çünkü $0 \cdot n = 0$ ise $0 \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot m' = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot m + 0$.

Ayrıca istediğimiz gibi $x \mapsto \ell \cdot x$ varsa $\ell' \cdot n = \ell \cdot n + n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\ell' \cdot m' &= \ell \cdot m' + m' \\
&= (\ell \cdot m + \ell) + m' \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m') \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell') \\
&= (\ell \cdot m + m) + \ell' \\
&= \ell' \cdot m + \ell'.
\end{aligned}$$

Ama burada toplamanın birleşme ve değişme özelliklerini kullandık; bunlar kanıtlanmalıdır.

Buraya kadar gelmek için tümevarım yeter. Yani 45 numaralı sayfadaki ilk üç Peano Aksiyomu yeter. Sayılar teorisinde, her pozitif n modülüse göre tamsayılar, bu aksiyomları sağlar. Yani eğer bir a kümesinin elemanları tamsayı ise, ve

$$x \equiv 0 \pmod{n}$$

denkliğinin a kümesinden çözümü varsa, ve ayrıca her ℓ tamsayısı için

$$x \equiv \ell \Rightarrow y \equiv \ell' \pmod{n}$$

karaştırmasının a kümesinden çözümü varsa, o zaman her k tamsayısı için

$$x \equiv k \pmod{n}$$

denkliğinin a kümesinden çözümü vardır. Örneğin p, bir asal sayı olsun. O zaman

$$0^p \equiv 0 \pmod{p},$$

ve

$$a^p \equiv a \Rightarrow (a+1)^p \equiv a + 1 \pmod{p},$$

çünkü

$$\begin{aligned}(a+1)^p &\equiv a^p + pa^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-2}a^2 + pa + 1\\ &\equiv a^p + 1 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Sonuç olarak Fermat'nın Teoremi doğrudur, yani her p asal sayısı için, her a tamsayısı için*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Aynı sebeple tüm a, b, c, ve d tamsayıları için, her pozitif n sayısı için

$$a \equiv b \land c \equiv d \Rightarrow a + c \equiv b + d \land a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}.$$

Sadece tümevarımı kullanarak $(x, y) \mapsto x^y$ ikili üstel işlemi tanımlanabilir mi? Özyineli tanım varsa ω kümesindeki her k için

$$k^0 = 1, \qquad \forall x\, (x \in \omega \Rightarrow k^{x'} = k^x \cdot k). \tag{$\|$}$$

Özel olarak $0^0 = 1$, ama $n > 0$ ise $0^n = 0$. Öyleyse $0 \equiv n$ ama $0^0 \not\equiv 0^n \pmod{n}$. Üstel işlem için tümevarım yetmez.†

Teorem 30 (Özyineleme [*Recursion*]). *$\boldsymbol{A}$, bir sınıf olsun, ve $b \in \boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden*

$$\boldsymbol{G}(0) = b, \qquad \forall x\, \Big(x \in \omega \Rightarrow \boldsymbol{G}(x') = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{G}(x)\big)\Big)$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır.

---

*Gauss'a [8, ¶50] göre verdiğimiz kanıt, Euler'indir.

†[18] makalesine bakın.

Kanıt. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır. En az biri varsa, bağıntı olarak, $\omega \times \boldsymbol{A}$ çarpımının altsınıfıdır, ve her (ℓ, d) elemanı için,

- ya $(\ell, d) = (0, b)$,
- ya da bir (k, c) elemanı için, $k' = \ell$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$.

Bu özelliği olan *kümeler* vardır, mesela

$$\{(0,b)\},\quad \big\{(0,b),\big(1,\boldsymbol{F}(b)\big)\big\},\quad \Big\{(0,b),\big(1,\boldsymbol{F}(b)\big),\Big(2,\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}(b)\big)\Big)\Big\},\quad \ldots$$

Özelliği olan kümelerin oluşturduğu sınıf, $\boldsymbol{C}$ olsun. O zaman $\bigcup \boldsymbol{C}$, istediğimiz $\boldsymbol{G}$ göndermesi olacaktır. Bunu göstermek için, tüm Peano Aksiyomları kullanılmalıdır.

Hemen $\{(0,b)\} \in \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $(0,b) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Şimdi $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k,c) \in a$. O halde $a \cup \{(k', \boldsymbol{F}(c))\} \in \boldsymbol{C}$. Böylece $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Tümevarımla her k doğal sayısı için $\boldsymbol{A}$ sınıfının $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ içerilmesini sağlayan c elemanı vardır, yani

$$\{x \colon \exists y\ (x,y) \in \bigcup \boldsymbol{C}\} = \omega.$$

Şimdi

$$\Big\{x \colon \forall y\ \forall z\ \Big((x,y) \in \bigcup \boldsymbol{C} \wedge (x,z) \in \bigcup \boldsymbol{C} \Rightarrow y = z)\Big)\Big\} = \omega$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Soldaki küme, a_0 olsun. Eğer $(0,e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise, o zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(0,e) \in a$, dolayısıyla $e = b$ olmalıdır, çünkü 0, ardıl değildir. Öyleyse $0 \in a_0$. Şimdi $k \in a_0$ olsun. Gösterdiğimiz gibi $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir c elemanı için $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ve $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. $(k', d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k', d) \in a$. O halde a kümesinin bir (j, e) elemanı için $j' = k'$ ve $\boldsymbol{F}(e) = d$. Bu durumda $j = k$ olmalıdır. Böylece

$(k, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $e = c$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$, çünkü $k \in a_0$ varsayılır. Öyleyse $k' \in a_0$. Tümevarımla $a_0 = \omega$.

Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$, ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir $\boldsymbol{G}$ göndermesidir. $\boldsymbol{C}$ sınıfının tanımından $\boldsymbol{G}$ göndermesinin istediğimiz özellikleri vardır. $\square$

Şimdi, doğal sayılarda, (§), (¶), ve (‖) satırlarındaki bütün tanımlar geçerlidir.

4 Ordinaller

4.1 Özyineleme

Doğal sayılarda, bir göndermenin özyineli tanımının iki tane parçası vardır, biri 0 için, biri ardıllar için. Ordinallerde üçüncü bir parça gerekir, limitler için.

Tüm α ordinalleri için

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' \tag{$*$}$$

olacak. Ama β limitse, $\alpha + \beta$ nedir? Mesela $\alpha + \omega$ nedir? Aslında 30 numaralı teoreme göre ω kümesinden **ON** sınıfına giden, $(*)$ satırındaki özellikleri olan $x \mapsto \alpha + x$ göndermesi vardır. Her n doğal sayısı için,

$$\alpha + n < \alpha + \omega$$

eşitsizliğini isteriz. Yani $\alpha + \omega$, $\{y\colon \exists x\ (x \in \omega \wedge y = \alpha + x)\}$ sınıfının üst sınırı olmalıdır (sınıfın üst sınırı varsa). Bu sınıf, $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ olarak yazılabilir.

Genelde $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ise

$$\{y\colon \exists x\ (x \in \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{F}(x) = y)\}$$

sınıfı,

$$\{\boldsymbol{F}(x)\colon x \in \boldsymbol{C}\}, \qquad \boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$$

ifadelerinin biri olarak yazılabilir. Bu sınıf, $\boldsymbol{C}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **görüntüsüdür.** Bu durumda, $\boldsymbol{F}$ göndermesi $\boldsymbol{C}$ sınıfında **tanımlanır,** çünkü $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı tarafından kapsanır. Eğer $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{C}$ sınıfında tanımlanmazsa, $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$ ifadesini yazmayacağız.

ω kümesinin $\{\alpha+x\colon x \in \omega\}$ görüntüsünün üst sınırı varsa, en küçük üst sınırı, yani *supremumu,* vardır (çünkü **ON**, iyi sıralanır). Şimdi $(*)$ satırındaki özelliklere göre

$$\alpha \subseteq \alpha + 1 \subseteq \alpha + 2 \subseteq \cdots$$

Eğer $\bigcup\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ bir ordinalse, $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ kümesinin üst sınırıdır, aslında supremumudur.

Teorem 31. *Elemanları ordinal olan her sınıfın bileşimi, ya bir ordinal, ya da ordinallerin sınıfıdır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. $b \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir α elemanı için $b \in \alpha$, dolayısıyla $b \subseteq \alpha$ ve onun için $b \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ geçişlidir. Ayrıca, **ON** sınıfı da geçişli olduğundan, $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$, dolayısıyla $\bigcup \boldsymbol{A}$, $\in$ tarafından iyi sıralanır. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ ya bir ordinaldir, ya da küme olmayan bir sınıftır. İkinci durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin **ON** olduğunu göstereceğiz. Eğer $\bigcup \boldsymbol{A} \subset \mathbf{ON}$ ise $\beta \in \mathbf{ON} \smallsetminus \bigcup \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \beta$, çünkü $\bigcup \boldsymbol{A}$ geçişlidir (eğer $\gamma \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise $\gamma \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\beta \notin \gamma$ ve $\gamma \leqslant \beta$). Bu durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$, bir kümedir, dolayısıyla ordinaldir. □

Sonuç olarak, eğer $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ ve $\bigcup \boldsymbol{A}$ bir kümeyse, o zaman bir ordinaldir; değilse, **ON** sınıfıdır. Şimdi $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin bir küme olduğunu isteriz:

AKSİYOM 6 (Bileşim)**.** *Her kümenin bileşimi, bir kümedir:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(z \in y \Leftrightarrow \exists w\ (w \in x \wedge z \in w)\bigr).$$

Teorem 32. *Ordinallerin oluşturduğu her kümenin bileşimi, kümenin supremumudur.*

Kanıt. $a \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. Son teorem ve Bileşim Aksiyomuna göre $\bigcup a$, bir α ordinalidir. O zaman α, a kümesinin bir üst sınırıdır. Eğer $\beta < \alpha$ ise, o zaman $\beta \in \alpha$, dolayısıyla a kümesinin bir γ elemanı için $\beta \in \gamma$, yani $\beta < \gamma$. Sonuç olarak β, a kümesinin üst sınırı değildir. Öyleyse $\alpha = \sup(a)$. □

Şimdi $\{\alpha + x \colon x \in \omega\}$ gibi görüntüler, küme olsun:

AKSİYOM 7 (Yerleştirme)**.** *Her göndermenin tanım sınıfının altkümesinin gönderme altında görüntüsü, bir kümedir. Yani her ikili $\varphi(x, y)$ formülü için*

$$\forall w \Big(\forall x\,\forall y\,\forall z\,\big(\varphi(x,y) \land \varphi(x,z) \land x \in w \Rightarrow y = z\big) \\ \Rightarrow \exists z\,\forall y\,\Big(y \in z \Leftrightarrow \exists x\,\big(x \in w \land \varphi(x,y)\big)\Big)\Big).$$

Şimdi β ordinalinde $x \mapsto \alpha + x$ göndermesi tanımlanırsa $\{\alpha + x \colon x \in \beta\}$ görüntüsü, bir kümedir. β limitse

$$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \beta\} \tag{†}$$

olsun. Bu koşul, $(*)$ satırındaki koşullarla, $\mathbf{ON}$ sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemesini tanımlayacaktır.

Teorem 33 (Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$,
2) *her* α *için* $\alpha \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha' \in \boldsymbol{A}$,
3) *her* α *limiti için* $\alpha \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha \in \boldsymbol{A}$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Hipotez altında $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. □

Eğer $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ise

$$\boldsymbol{F} \cap (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{F} \upharpoonright \boldsymbol{C}$$

olsun. Bu $\boldsymbol{F} \upharpoonright \boldsymbol{C}$ göndermesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{C}$ sınıfına **sınırlamasıdır** (*restriction*).

Teorem 34 (Özyineleme)**.** *$\boldsymbol{A}$, bir sınıf olsun, ve $b \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, ve $\boldsymbol{G}\colon \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman* $\mathbf{ON}$ *sınıfından* $\boldsymbol{A}$ *sınıfına giden*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{H}(0) = b,\\ \boldsymbol{H}(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)),\\ \alpha \textit{ limit ise } \boldsymbol{H}(\alpha) = \boldsymbol{G}\big(\{\boldsymbol{H}(\xi)\colon \xi < \alpha\}\big)\end{gathered}$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *göndermesi vardır.*

Kanıt. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{H}$ göndermesi vardır. Çünkü $\boldsymbol{H}_1$ göndermesinin ve $\boldsymbol{H}$ göndermesinin özellikleri aynı olsun. O zaman

1) $\boldsymbol{H}_1(0) = b = \boldsymbol{H}(0)$;
2) $\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{H}(\alpha)$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}_1(\alpha)) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)) = \boldsymbol{H}(\alpha');$$

3) α limit ise ve $\boldsymbol{H}_1 \upharpoonright \alpha = \boldsymbol{H} \upharpoonright \alpha$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}_1[\alpha]) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}[\alpha]) = \boldsymbol{H}(\alpha).$$

30 numaralı teoremin kanıtındaki gibi bir $\boldsymbol{C}$ sınıfı için $\boldsymbol{H} = \bigcup \boldsymbol{C}$ olacaktır. Bu sınıfın tanımına göre her a elemanı için $a \subseteq \mathbf{ON} \times \boldsymbol{A}$, ve a kümesinin her (α, d) elemanı için,

- ya $(\alpha, d) = (0, b)$,
- ya da bir (β, c) elemanı için, $\beta' = \alpha$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$,
- ya da α limit, ve $a \cap (\alpha \times \boldsymbol{A})$ kesişimi, tanım kümesi α olan bir f göndermesi, ve $\boldsymbol{G}(f[\alpha]) = d$.

Eğer $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı **ON** olan bir gönderme değilse, bir *en küçük* α için

$$\{x\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge (\alpha, x) \in \bigcup \boldsymbol{C}\}$$

sınıfının ya hiç elemanı yoktur ya da en az iki elemanı vardır. O zaman $\alpha \neq 0$. Eğer $\alpha = \beta'$ ise, o zaman bir c için $(\beta, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $(\alpha, \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Bu durumda eğer $(\alpha, d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise bir e için $d = \boldsymbol{F}(e)$ ve $(\beta, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $c = e$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$ (çünkü α en küçüktür). Öyleyse α ardıl olamaz. Benzer şekilde α limit olamaz. Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı **ON** olan bir gönderme olmalıdır. Bu göndermenin, tanımından dolayı istediğimiz özellikleri vardır. □

4.2 Toplama

Son teoreme göre her α için $(*)$ ve $(\dagger)$ satırlarındaki koşullar **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemini tanımlar. Yani

$$\begin{gathered} \alpha + 0 = \alpha, \\ \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \\ \beta \text{ limit} \Rightarrow \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi\colon \xi < \beta\}. \end{gathered}$$

Özel olarak

$$\alpha + 1 = \alpha'.$$

O zaman

$$1 + \omega = \sup\{1 + x \colon x \in \omega\} = \omega < \omega + 1,$$

ve genelde $0 < n < \omega$ ise

$$n + \omega = \omega < \omega + n.$$

Böylece **ON** sınıfında toplama değişmeli değildir.

Teorem 35. *$\beta < \gamma$ ise $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.*

Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\gamma = 0$ ise, iddia doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\beta < 0$ değildir.

2. $\gamma = \delta$ durumda iddianın doğru olduğu varsayılsın. Eğer $\beta < \delta'$ ise, o zaman $\beta \leqslant \delta$, dolayısıyla

$$\alpha + \beta \leqslant \alpha + \delta < (\alpha + \delta)' = \alpha + \delta'.$$

3. δ limit, $\gamma < \delta$ durumunda iddia doğru, ve $\beta < \delta$ ise, o zaman $\beta < \beta' < \delta$, dolayısıyla

$$\alpha + \beta < \alpha + \beta' \leqslant \sup_{\xi < \delta}(\alpha + \xi) = \alpha + \delta. \qquad \square$$

Teorem 36. *$\beta \leqslant \gamma$ ise $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.*

Kanıt. Şimdi α üzerinden tümevarım kullanacağız. $\beta \leqslant \gamma$ olsun.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.

2. $\beta+\alpha=\gamma+\alpha$ ise tabii ki

$$\beta+\alpha'=(\beta+\alpha)'=(\gamma+\alpha)'=\gamma+\alpha'.$$

$\beta+\alpha<\gamma+\alpha$ ise, 28 numaralı teoreme göre

$$\beta+\alpha'=(\beta+\alpha)'\leqslant\gamma+\alpha<(\gamma+\alpha)'=\gamma+\alpha'.$$

3. δ limit olsun, ve $\alpha<\delta$ ise, $\beta+\alpha\leqslant\gamma+\alpha$ olsun. O zaman

$$\beta+\delta=\sup_{\xi<\gamma}(\beta+\xi)\leqslant\sup_{\xi<\gamma}(\gamma+\xi)=\gamma+\delta. \qquad \square$$

Gördüğümüz gibi aynı zamanda $\beta<\gamma$ ama $\beta+\alpha=\gamma+\alpha$ olabilir, mesela $0<k<\ell<\omega$ ise $k+\omega=\ell+\omega$.

Teorem 37. *Her α için $0+\alpha=\alpha$.*

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 38. *$\alpha\leqslant\beta$ ise*

$$\alpha+\xi=\beta$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır. Yani $\alpha+x=\beta$ denkleminin bir ve tek bir ordinal çözümü vardır.

Kanıt. 35 numaralı teoreme göre denklemin en çok bir çözümü vardır. 36 ve 37 numaralı teoremlere göre

$$\alpha+\beta\geqslant0+\beta=\beta,$$

dolayısıyla $\{\xi\colon\beta\leqslant\alpha+\xi\}$ boş değildir (çünkü β elemanını içerir). En küçük elemanı, δ olsun. Üç durum vardır.

1. $\delta=0$ ise

$$\beta\leqslant\alpha+\delta=\alpha,$$

dolayısıyla $\beta=\alpha=\alpha+\delta$ (çünkü $\alpha\leqslant\beta$ da sağlanır).

2. $\delta = \gamma'$ ise $\alpha + \gamma < \beta$, dolayısıyla

$$\alpha + \delta = (\alpha + \gamma)' \leqslant \beta, \qquad\qquad \alpha + \delta = \beta$$

(çünkü $\alpha + \delta \geqslant \beta$ da sağlanır).

3. δ limit olsun. Eğer $\gamma < \delta$ ise $\alpha + \gamma < \beta$ olmalıdır. O zaman

$$\alpha + \delta = \sup_{\xi < \delta}(\alpha + \xi) \leqslant \beta, \qquad\qquad \alpha + \delta = \beta. \qquad \square$$

$\alpha \leqslant \beta$ durumunda $\alpha + \xi = \beta$ denkleminin çözümü için

$$\beta - \alpha$$

ifadesi yazılabilir. Örneğin $\alpha' - 1 = \alpha$.

Teorem 39. *β limitse $\alpha + \beta$ toplamı da limittir.*

Alıştırma 19. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 40. *Tüm α, β, ve γ için*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$.

2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ise

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma') = \alpha + (\beta + \gamma)' &= (\alpha + (\beta + \gamma))' \\ &= ((\alpha + \beta) + \gamma)' = (\alpha + \beta) + \gamma'. \end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve $\gamma < \delta$ ise $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ olsun. Ama $\gamma < \delta$ ise

$$\beta + \gamma < \beta + \delta, \qquad \alpha + (\beta + \gamma) < \alpha + (\beta + \delta).$$

Öyleyse

$$(\alpha + \beta) + \delta = \sup_{\xi < \delta}\big((\alpha + \beta) + \xi\big) = \sup_{\xi < \delta}\big(\alpha + (\beta + \xi)\big) \leqslant \alpha + (\beta + \delta).$$

Ayrıca, 39 numaralı teoreme göre $\beta + \delta$ limit olduğundan

$$\alpha + (\beta + \delta) = \sup_{\xi < \beta + \delta} (\alpha + \xi).$$

Dahası $\theta < \beta + \delta$ ise, bir γ için $\gamma < \delta$ ve $\theta < \beta + \gamma$ (çünkü $\beta + \delta = \sup\{\beta + \xi \colon \xi < \delta\}$). O halde

$$\sup_{\xi < \beta + \delta} (\alpha + \xi) \leqslant \sup_{\xi < \delta}(\alpha + (\beta + \xi)) = (\alpha + \beta) + \delta.$$

Sonuç olarak $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$. □

Aslında son teoremin kanıtı, genel bir yöntemin örneğidir. **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemi,

1) $\beta < \gamma \Rightarrow \boldsymbol{F}(\beta) < \boldsymbol{F}(\gamma)$,
2) γ limitse $\boldsymbol{F}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \gamma\}$

koşullarını sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ işlemidir. Bu tip herhangi bir işleme **normal** (*normal*) denir. İlk koşula göre $\boldsymbol{F}$, **kesin artan** (*strictly increasing*) bir göndermedir. O zaman ikinci koşula göre $\boldsymbol{F}$, **süreklidir** (*continuous*).

Teorem 41. *Eğer* $0 \subset a \subset$ **ON** *ve* $\sup(a) \notin a$, *o zaman* $\sup(a)$, *bir limittir.*

Alıştırma 20. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 42. $\boldsymbol{F}$, **ON** *sınıfında normal bir işlem olsun. Tüm boş olmayan ordinallerin oluşturduğu a kümeleri için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(a)) = \sup(\boldsymbol{F}[a]),$$

yani

$$\boldsymbol{F}(\sup_{x\in a} x) = \sup_{x\in a} \boldsymbol{F}(x).$$

Kanıt. $\sup(a) = \beta$ olsun. Eğer $\beta \in a$ ise, $\boldsymbol{F}$ işlemi artan olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup_{x\in a} \boldsymbol{F}(x).$$

Şimdi $\beta \notin a$ olsun. Son teoreme göre β bir limit olmalıdır. Ayrıca $a \subseteq \beta$, dolayısıyla

$$\sup(\boldsymbol{F}[a]) \leqslant \sup(\boldsymbol{F}[\beta]) = \boldsymbol{F}(\beta)$$

(çünkü $\boldsymbol{F}$ süreklidir). Dahası $\alpha < \beta$ ise, a kümesinin bir γ elemanı için $\alpha < \gamma$, dolayısıyla

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup(\boldsymbol{F}[\beta]) \leqslant \sup(\boldsymbol{F}[a])$$

(yine $\boldsymbol{F}$ sürekli olduğu için). □

Bu teoremde $a = 0$ ise $\sup(\boldsymbol{F}[a]) = \sup(0) = 0$, ama $\boldsymbol{F}$ normal olunca, $\boldsymbol{F}(0) > 0$ olabilir.

Bir δ limiti için, eğer

$$\gamma < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

ise, o zaman teoreme göre

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \delta) &= \alpha + \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi)\\ &= \sup_{\xi<\delta}(\alpha + (\beta + \xi)) = \sup_{\xi<\delta}((\alpha + \beta) + \xi) = (\alpha + \beta) + \delta,\end{aligned}$$

çünkü $x \mapsto \alpha + x$, normaldir.

4.3 Çarpma

Her α için **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha \cdot x$ işlemi, tanımına göre,

$$\begin{gathered}\alpha \cdot 0 = 0,\\ \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,\\ \gamma \text{ limit} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \gamma\}\end{gathered}$$

koşulları sağlar. Özel olarak

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Örneğin

$$\begin{gathered}\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = \sup_{x\in\omega}(\omega + x),\\ 2 \cdot \omega = \sup_{x\in\omega}(2 \cdot x) = \omega,\end{gathered}$$

dolayısıyla

$$2 \cdot \omega < \omega \cdot 2.$$

Teorem 43. $0 \cdot \alpha = 0$ *ve* $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Alıştırma 21. Teoremi kanıtlayın.

$\alpha \geqslant 1$ ise, $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işleminin normal olduğunu kanıtlayacağız. Bu işlem kesin artan ise, tanımdan dolayı süreklidir, dolayısıyla normaldir. O zaman 35 numaralı teorem gibi bir teorem yeterli olacaktır, çünkü 35 numaralı teorem, genel bir yöntem gösterir:

Teorem 44. *Eğer $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$, ve tüm α için*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha'),$$

ve limit olan tüm β için

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup_{\xi<\beta} \boldsymbol{F}(\xi)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ normaldir.

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 45. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemi, normaldir.*

Alıştırma 23. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 46. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Kanıt. $\gamma = 0$ durumunda kanıt kolaydır. $\gamma = \delta$ durumunda iddia doğruysa

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta') &= \alpha \cdot (\beta + \delta)' \\
&= \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha \\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha \\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta';
\end{aligned}$$

böylece $\gamma = \delta'$ durumunda iddia doğrudur. Son olarak δ limit, ve $\gamma < \delta$ durumunda iddia doğru olsun. $\gamma = \delta$ durumunu kanıtlayacağız.

$\alpha = 0$ ise iddia kolaydır. $\alpha \geqslant 1$ olsun. O zaman $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ ve $\xi \mapsto \alpha \cdot \beta + \xi$ işlemleri normal olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi)\\ &= \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot (\beta + \xi))\\ &= \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)\\ &= \alpha \cdot \beta + \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta.\end{aligned}$$ □

Gördüğümüz gibi $2 \cdot \omega < \omega + \omega$, dolayısıyla

$$(1+1) \cdot \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega.$$

Teorem 47. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Alıştırma 24. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 48. $\beta \leqslant \gamma$ *ise* $\beta \cdot \alpha \leqslant \gamma \cdot \alpha$.

Alıştırma 25. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi ξ gibi η, ordinal değişken olsun.

Teorem 49. $1 \leqslant \alpha$ *ise*

$$\alpha \cdot \xi + \eta = \beta \wedge \eta < \alpha$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. $\alpha \cdot \beta \geqslant 1 \cdot \beta = \beta$ ve $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ artan olduğundan

$$\{\xi \colon \alpha \cdot \xi \leqslant \beta\} \subseteq \beta',$$

dolayısıyla $\bigcup\{\xi\colon \alpha\cdot\xi\leqslant\beta\}$, bir γ ordinalidir. Böylece

$$\gamma=\sup\{\xi\colon \alpha\cdot\xi\leqslant\beta\}.$$

Eğer $\gamma\in\{\xi\colon \alpha\cdot\xi\leqslant\beta\}$ ise $\alpha\cdot\gamma\leqslant\beta$. Değilse γ limit olmalıdır, dolayısıyla

$$\alpha\cdot\gamma=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi)\leqslant\beta.$$

Şimdi $\alpha\cdot\gamma+\eta=\beta$ denkleminin δ çözümü vardır. Eğer $\delta\geqslant\alpha$ ise $\alpha+\xi=\delta$ denkleminin bir θ çözümü vardır, dolayısıyla

$$\begin{gathered}\beta=\alpha\cdot\gamma+\delta=\alpha\cdot\gamma+\alpha+\theta=\alpha\cdot\gamma'+\theta,\\ \gamma'\in\{\xi\colon \alpha\cdot\xi\leqslant\beta\},\\ \gamma'\leqslant\gamma,\end{gathered}$$

ki bu imkânsızdır. Öyleyse $\delta<\alpha$, ve (γ,δ), istediğimiz çözümdür. Benzer şekilde başka çözüm yoktur, çünkü

$$\alpha\cdot\gamma+\delta=\alpha\cdot\gamma_1+\delta_1,\qquad\qquad \gamma<\gamma_1$$

ise $\gamma'\leqslant\gamma_1$, dolayısıyla bir θ için

$$\begin{gathered}\gamma'+\theta=\gamma_1,\\ \alpha\cdot\gamma+\delta=\alpha\cdot\gamma_1+\delta_1=\alpha\cdot\gamma+\alpha+\alpha\cdot\theta+\delta_1,\\ \delta=\alpha+\alpha\cdot\theta+\delta_1\geqslant\alpha.\end{gathered}$$

□

4.4 Kuvvet alma

Her α için, $\alpha>0$ ise, **ON** sınıfında $x\mapsto\alpha^x$ işlemi, tanımına göre,

$$\begin{gathered}\alpha^0=1,\\ \alpha^{\beta'}=\alpha^\beta\cdot\alpha,\\ \gamma\text{ limit}\Rightarrow\alpha^\gamma=\sup\{\alpha^\xi\colon \xi<\gamma\}\end{gathered}$$

koşullarını sağlar. Özel olarak

$$\alpha^1 = \alpha.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$0^0 = 1, \qquad \beta > 0 \Rightarrow 0^\beta = 0.$$

Öyleyse γ limit ise 0^γ kuvveti, $\sup\{0^\xi : \xi < \gamma\}$ değildir, ama

$$0^\gamma = \sup\{0^\xi : 0 < \xi < \gamma\}.$$

Teorem 50. $1^\alpha = 1$.

Alıştırma 26. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 51. $\alpha \leqslant \beta$ *ise* $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.

Alıştırma 27. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 52. $\alpha \geqslant 2$ *ise* $\xi \mapsto \alpha^\xi$ *işlemi, normaldir.*

Alıştırma 28. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 53. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Alıştırma 29. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 54. $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

Alıştırma 30. Teoremi kanıtlayın.

İlkokuldan bildiğimiz gibi, eğer $2 \leqslant t < \omega$ ve $1 \leqslant a < \omega$ ise, o zaman bir n doğal sayısı için, $n+1$ tane a_0, a_1, ..., a_n doğal sayısı için

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq t, \qquad a_0 \neq 0,$$

ve

$$a = t^n \cdot a_0 + t^{n-1} \cdot a_1 + \cdots + t^0 \cdot a_n.$$

O zaman a sayısı,

$$a_0 a_1 \ldots a_n \qquad \text{veya} \qquad (a_0 a_1 \ldots a_n)_t$$

olarak yazılabilir; bu ifade, a sayısının t **tabanında yazılımıdır** [15, 17. böl.] (*base-t numeral*). 0 olan a_i rakamları (*digits*) çıkartılırsa, ω kümesinin bir m elemanı için, ω kümesinin

$$b_0 > b_1 > \cdots > b_m, \qquad \{c_0, c_1, \ldots, c_m\} \subseteq \{1, \ldots, t-1\},$$

ve

$$a = t^{b_0} \cdot c_0 + t^{b_1} \cdot c_1 + \cdots + t^{b_m} \cdot c_m$$

koşullarını sağlayan b_i ve c_i elemanları vardır. Böylece a sayısı,

$$\{(b_0, c_0), (b_1, c_1), \ldots, (b_m, c_m)\}$$

göndermesini belirtir. Göstereceğimiz gibi her 0 olmayan ordinal, böyle bir gönderme belirtir.

Teorem 55. *Eğer $\boldsymbol{F}$,* **ON** *sınıfında kesin artan bir işlemse, tüm α için*

$$\alpha \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Kanıt. $\alpha > \boldsymbol{F}(\alpha)$ ise, $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\boldsymbol{F}(\alpha) > \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}(\alpha))$, dolayısıyla $\{\xi \colon \xi > \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur. **ON** iyi sıralanmış olduğundan $\{\xi \colon \xi > \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfı boş olmalıdır. □

Örneğin $\alpha > 1$ ise $\alpha^\beta \geqslant \beta$, dolayısıyla sonraki teorem kanıtlanabilir. Şimdi ξ ve η gibi ζ, ordinal değişken olsun.

Teorem 56. *$\alpha \geqslant 2$ ise her 0 olmayan β için*

$$\alpha^\xi \cdot \eta + \zeta = \beta \wedge \eta < \alpha \wedge \zeta < \alpha^\xi$$

sisteminin bir ve tek bir (γ, δ, θ) çözümü vardır, ve ayrıca $\gamma \leqslant \beta$.

Alıştırma 31. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç olarak $\alpha > 1$ ise, her 0 olmayan β için

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots,$$

ve

$$0 < \delta_0 < \alpha, \qquad 0 < \delta_1 < \alpha, \qquad \ldots,$$

ve

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots$$

koşullarını sağlayan γ_i ve δ_i ordinalleri vardır. Ayrıca, **ON** iyi sıralanmış olduğundan, kesin azalan $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ dizisi sona ermelidir. Yani bir n doğal sayısı için

$$\beta = \alpha^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_n} \cdot \delta_n.$$

Buradaki $\{(\gamma_0, \delta_0), (\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_n, \delta_n)\}$ kümesine, sonraki teoremde

$$\beta_\alpha$$

adı verilecek.* Genel olarak bu kümeyi tanımlamak için (yani $\xi \mapsto \xi_\alpha$ göndermesini tanımlamak için), özyinelemeyi 34 numaralı teoremden farklı bir şekilde kullanacağız.

Teorem 57. *Tanım sınıfı bir küme olan her gönderme bir kümedir.*

*Bu β_α ifadesi, benimdir; başka kitaplarda görmedim.

Alıştırma 32. Teoremi kanıtlayın.

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı ve b kümesi için

$$^{b}\boldsymbol{A},$$

b kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden göndermelerin sınıfı olsun.

Alıştırma 33. $\mathscr{P}(a) \approx {}^{a}2$ eşlenikliğini kanıtlayın.

Teorem 58 (Özyineleme)**.** *$\boldsymbol{A}$ bir sınıf olsun, ve*

$$\boldsymbol{F}\colon \{x\colon \exists\eta\ x \in {}^{\eta}\boldsymbol{A}\} \to \boldsymbol{A}$$

olsun. O zaman* **ON** *sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden ve her α ordinali için*

$$\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction \alpha)$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır.

Kanıt. Tanım kümesi bir ordinal olan, ve bu ordinalin tüm α elemanları için

$$g(\alpha) = \boldsymbol{F}(g \restriction \alpha)$$

koşulunu sağlayan g göndermelerinin oluşturduğu sınıf, $\boldsymbol{B}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{B}$ sınıfının bir g elemanının tanım kümesi α, bir h elemanının tanım kümesi β, ve $\alpha \leqslant \beta$ ise, o zaman

$$g \subseteq h$$

(neden?). Sonuç olarak istediğimiz gönderme, $\bigcup \boldsymbol{B}$ (neden?). $\square$

*$\{x\colon \exists\eta\ x \in {}^{\eta}\boldsymbol{A})\}$ sınıfı, $\bigcup_{\eta} {}^{\eta}\boldsymbol{A}$ olarak yazılabilir; ama ${}^{\beta}\boldsymbol{A}$ sınıfları küme olmayabilir.

Teorem 59. *$\alpha \geqslant 2$ ise bir ve tek bir $\xi \mapsto \xi_\alpha$ göndermesi vardır öyle ki*

$$\beta = \alpha^\gamma \cdot \delta + \theta, \qquad \delta < \alpha, \qquad \theta < \alpha^\gamma \tag{‡}$$

ise, o zaman

$$\beta_\alpha = \{(\gamma, \delta)\} \cup \theta_\alpha.$$

Kanıt. 56 numaralı teoreme göre, (‡) koşullarını sağlayan bir ve tek bir (γ, δ, θ) üçlüsü vardır. Ayrıca $\theta < \beta$. O zaman öyle bir $\boldsymbol{F}$ göndermesi vardır ki her β için, eğer g, tanım kümesi β olan (ve değer kümesi herhangi bir küme olan) bir gönderme, ve (γ, δ, θ) üçlüsü, (‡) satırındaki gibiyse, o zaman

$$\boldsymbol{F}(g) = \{(\gamma, \delta)\} \cup g(\beta).$$

Öyleyse istediğimiz $\beta \mapsto \beta_\alpha$ göndermesi, son teoreme göre

$$\boldsymbol{G}(\beta) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction \beta)$$

koşulunu sağlayan $\boldsymbol{G}$ göndermesidir. □

4.5 Cantor normal biçimi

Eğer $\beta_\omega = \{(\alpha_0, k_0), \dots, (\alpha_n, k_n)\}$ ise, o zaman

$$\beta = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot k_n.$$

13 numaralı sayfada dediğimiz gibi bu toplam, β ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Buradaki α_0 üssü, β ordinalinin **derecesidir** (*degree*). Bu derece

$$\operatorname{der}(\beta)$$

olarak yazılsın.

Teorem 60. $\alpha > 0$ *ise*

$$1 + \omega^\alpha = \omega^\alpha.$$

Alıştırma 34. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 61. $\operatorname{der}(\alpha) < \operatorname{der}(\beta)$ *ise*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Kanıt. $\alpha < \beta$ ise $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bu durumda bir γ için, $\beta = \alpha + \gamma$ ve $\gamma > 0$, dolayısıyla

$$\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\alpha + \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\alpha \cdot (1 + \omega^\gamma) = \omega^\alpha \cdot \omega^\gamma = \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\beta. \qquad \square$$

Örneğin

$$\begin{aligned}(\omega^{\omega^2} + \omega^{\omega\cdot 4+7}\cdot 5 + \omega^{\omega\cdot 2}\cdot 7 + 2) + (\omega^{\omega\cdot 4+7}\cdot 8 + \omega\cdot 3 + 16)&\\ = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega\cdot 4+7}\cdot 13 + \omega\cdot 3 + 16.&\end{aligned}$$

Teorem 62. $\alpha > \operatorname{der}(\beta)$ *ve* $1 \leqslant k < \omega$ *ve* $1 \leqslant n < \omega$ *ise*

$$(\omega^\alpha \cdot k + \beta)\cdot n = \omega^\alpha \cdot k \cdot n + \beta.$$

Kanıt. $n = 1$ durumunda iddia doğrudur. $n = m$ durumunda doğruysa

$$\begin{aligned}(\omega^\alpha \cdot k + \beta)\cdot(m+1) &= (\omega^\alpha \cdot k + \beta)\cdot m + \omega^\alpha\cdot k + \beta\\ &= \omega^\alpha \cdot k \cdot m + \beta + \omega^\alpha \cdot k + \beta\\ &= \omega^\alpha \cdot k \cdot m + \omega^\alpha \cdot k + \beta\\ &= \omega^\alpha \cdot k \cdot (m+1) + \beta,\end{aligned}$$

dolayısıyla $n = m + 1$ durumunda da doğrudur. Tümevarımdan $1 \leqslant n < \omega$ ise iddia doğrudur. $\square$

Örneğin
$$(\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot 7 = \omega^{\omega} \cdot 14 + \omega + 5.$$

Teorem 63. *$1 \leqslant \alpha$ ve $0 < \beta$ ise*
$$\alpha \cdot \omega^{\beta} = \omega^{\operatorname{der}(\alpha)+\beta}.$$

Kanıt. Önce $\beta = 1$ durumunda iddiayı kanıtlayacağız. $1 \leqslant \alpha < \omega$ ise $\operatorname{der}(\alpha) = 0$, dolayısıyla
$$\alpha \cdot \omega^1 = \alpha \cdot \omega = \sup_{x \in \omega} \alpha \cdot x = \omega = \omega^{\operatorname{der}(\alpha)+1}.$$

Şimdi $\omega \leqslant \alpha$ olsun. O zaman
$$\alpha = \omega^{\gamma} \cdot k + \delta, \qquad \alpha > \operatorname{der}(\gamma), \qquad 1 \leqslant k < \omega$$
koşullarını sağlayan γ, k, ve δ vardır. O halde $1 \leqslant n < \omega$ ise
$$\omega^{\gamma} \cdot k \leqslant \alpha \leqslant \alpha \cdot n = \omega^{\gamma} \cdot k \cdot n + \delta < \omega^{\gamma} \cdot (k \cdot n + 1) < \omega^{\gamma+1},$$
$$\omega^{\gamma+1} = \sup_{1 \leqslant \xi < \omega} (\omega^{\gamma} \cdot \xi) \leqslant \sup_{1 \leqslant \xi < \omega} (\alpha \cdot \xi) \leqslant \omega^{\gamma+1},$$
$$\alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma+1} = \omega^{\operatorname{der}(\alpha)+1}.$$

Genelde $\alpha \geqslant 1$ ve $\beta \geqslant 1$ ise, bir θ için $\beta = 1 + \theta$, dolayısıyla
$$\alpha \cdot \omega^{\beta} = \alpha \cdot \omega \cdot \omega^{\theta} = \omega^{\operatorname{der}(\alpha)+1+\theta} = \omega^{\operatorname{der}(\alpha)+\beta}. \qquad \square$$

Örneğin
$$5 \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7) = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 35,$$
$$(\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16) = \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16,$$
ve
$$(\omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7)$$
$$= \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16 + \omega^{\omega} \cdot 14 + \omega + 5.$$

Teorem 64. $1 \leqslant k < \omega$ *ve* $n < \omega \leqslant \alpha$ *ise*

$$k^{\omega^{n+1}} = \omega^{\omega^n}, \qquad\qquad k^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}.$$

Alıştırma 35. Teoremi kanıtlayın. *İpucu:* $n+1 = 1+n$ ve $\alpha = 1+\alpha$.

Örneğin

$$2^{\omega^\omega\cdot 3+\omega^5\cdot 4+\omega\cdot 7+5} = \omega^{\omega^\omega\cdot 3+\omega^4\cdot 4+7}\cdot 32.$$

Teorem 65. $\omega \leqslant \alpha$ *ve* β *limit ve* $n < \omega$ *ise*

$$\alpha^{\beta+n} = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)\cdot\beta}\cdot\alpha^n.$$

Alıştırma 36. Teoremi kanıtlayın. *İpucu:* Önce $\alpha^\omega = \omega^{\mathrm{der}(\alpha)\cdot\omega}$ denkliğini kanıtlayın.

Örneğin

$$\begin{aligned}
&(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^{\omega^2+\omega\cdot 3+2}\\
&\quad= \omega^{(\omega+1)\cdot(\omega^2+\omega\cdot 3)}\cdot(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^2\\
&\quad= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}\cdot(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^2\\
&\quad= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}\cdot(\omega^{\omega+1+\omega+1}+\omega^{\omega+1+2}+\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)\\
&\quad= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}\cdot(\omega^{\omega\cdot 2+1}+\omega^{\omega+3}+\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)\\
&\quad= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+3}\\
&\qquad\qquad+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+1}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+2}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}.
\end{aligned}$$

5 Kardinaller

5.1 Eşleniklik

Eğer $\boldsymbol{R}$ ve $\boldsymbol{S}$, iki bağıntıysa, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S} = \{(x,z)\colon \exists y\ (x\ \boldsymbol{R}\ y \wedge y\ \boldsymbol{S}\ z)\}.$$

Bu yeni bağıntı, $\boldsymbol{R}$ ile $\boldsymbol{S}$ bağıntılarının **bileşkesidir** (*composite*). $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R}$ bileşkesi, $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S}$ bileşkesinden farklı olabilir.

Teorem 66. *Eğer $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ ise, o zaman*

$$\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}, \qquad \forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G})(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x))\big).$$

Alıştırma 37. Teoremi kanıtlayın.

Teoremdeki durumda $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}$ göndermesi,

$$\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}$$

olarak yazılır.

Şimdi $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{F}$ bağıntısının $\breve{\boldsymbol{F}}$ ters bağıntısı, $\boldsymbol{B}$ sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir göndermeyse, o zaman bu gönderme, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **ters göndermesi** veya **tersidir** (*inverse*), ve

$$\boldsymbol{F}^{-1}$$

olarak yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{F}$ göndermesi, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir **eşlemedir** (*bijection*), ve $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının kendileri, birbiriyle **eşleniktir** (*equipollent*).

Teorem 67. *Bir sınıf, bir kümeyle eşlenikse, sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 38. Teoremi kanıtlayın.

67 ve 57 numaralı teoremler sayesinde *kümelerin* eşlenikliği, ikili bir bağıntıdır. Bu bağıntının işareti

$$\approx$$

olsun. O zaman $=$ gibi $\approx$, yeni bir yüklemdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} a \approx b \text{ denktir } \exists w \Bigg(\forall x\, \exists y \Big(\big(x \in a \Rightarrow y \in b \land (x, y) \in w\big) \\ \land \big(x \in b \Rightarrow y \in a \land (y, x) \in w\big)\Big) \\ \land \forall x\, \forall y\, \forall z \Big(\big((x, y) \in w \land (x, z) \in w \land x \in a \Rightarrow y = z \land y \in b\big) \\ \land \big((x, z) \in w \land (y, z) \in w \land z \in b \Rightarrow x = y \land x \in a\big)\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

Eşitlik gibi eşleniklik, bir denklik bağıntısıdır (31 numaralı sayfaya bakın):

Teorem 68. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \approx a, \qquad a \approx b \Rightarrow b \approx a, \qquad a \approx b \land b \approx c \Rightarrow a \approx c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 39. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 69. *a, bir $\boldsymbol{S}$ bağıntısı tarafından iyi sıralanmış bir küme olsun. O zaman bir ve tek bir β için, a kümesinden β ordinaline giden*

$$x \;\boldsymbol{S}\; y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

koşulunu sağlayan bir f eşlemesi vardır.

Kanıt. 58 numaralı Özyineleme Teoreminde a kümesi, **ON** sınıfının yerini alabilir. Yani tanım kümesi a olan ve

$$f(b) = \{f(c) \colon c \in a \land c \, \boldsymbol{S} \, b\}$$

koşulunu sağlayan bir f göndermesi vardır. O zaman a kümesinin her b elemanı için $f(b)$ bir ordinaldir. Zira değilse b, $f(b)$ değeri ordinal olmayan a kümesinin en küçük elemanı olsun. O zaman $f(b) \subseteq \mathbf{ON}$, ve ayrıca $f(b)$ geçişlidir, dolayısıyla $f(b)$ bir ordinal olmalıdır. Aynı şekilde $f[a]$ bir ordinaldir. Eğer f_0 ile f_1, aynı koşulu sağlar, ve

$$f_0 \restriction \{c \in a \colon c \, \boldsymbol{S} \, b\} = f_1 \restriction \{c \in a \colon c \, \boldsymbol{S} \, b\}$$

ise, o zaman $f_0(b) = f_1(b)$; öyleyse $f_0 = f_1$. □

Teorem 70. *Tüm a ile b kümeleri için $a \times b$ çarpımı, bir kümedir.*

Kanıt. Yerleştirme Aksiyomuna göre her c için $a \times \{c\}$ bir kümedir, dolayısıyla bir $\big\{a \times \{x\} \colon x \in b\big\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf da bir kümedir. Ayrıca

$$a \times b = \bigcup \big\{a \times \{x\} \colon x \in b\big\},$$

ve Bileşim Aksiyomuna göre bu bileşim, bir kümedir. □

Tekrar a, s, ve β, 69 numaralı teoremdeki gibi olsun. $\big(a, \boldsymbol{S} \cap (a \times a)\big)$ sıralı ikilisi,

$$(a, \boldsymbol{S})$$

olarak yazılabilir. O zaman β, $(a, \boldsymbol{S})$ ikilisinin **ordinalidir** (β *is the ordinal of* $(a, \boldsymbol{S})$), ve

$$\beta = \operatorname{ord}(a, \boldsymbol{S})$$

yazabiliriz. O halde

$$a \approx \operatorname{ord}(a, \boldsymbol{S}).$$

Tanıma göre

$$\operatorname{kard}(a) = \min\{\beta\colon a \approx \beta\};$$

bu ordinal, a kümesinin **kardinalidir** (*cardinal*). Öyleyse her *iyi sıralanabilir* kümenin kardinali vardır. Özel olarak her ordinalin kardinali vardır. Kardinaller, bir

$$\mathbf{KN}$$

sınıfını oluşturur. O zaman $\mathbf{KN} \subseteq \mathbf{ON}$. κ, λ, μ ve ν küçük Yunan harfleri, her zaman kardinalleri gösterecektir.

Aslında 15 numaralı sayfadaki Seçim Aksiyomuna göre her küme iyi sıralanabilir; ama şu anda bu aksiyom, resmi askiyomlarımızdan biri değildir.

5.2 Sonlu kümeler

Bir doğal sayıyla eşlenik bir küme, **sonludur** (*finite*); sonlu olmayan bir sınıf, **sonsuzdur** (*infinite*). O zaman her sonlu kardinal, bir doğal sayıdır.

Birkaç tane von Neumann doğal sayısının tanımını, 10 ve 40 numaralı sayfalardan hatırlayalım:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0,1\}, \quad 3 = \{0,1,2\}, \quad 4 = \{0,1,2,3\}.$$

Bir a kümesinin

1) hiçbir elemanı yoksa, o zaman $a \approx 0$; aslında $a = 0$;
2) tek bir elemanı varsa, o zaman $a \approx 1$;
3) iki (ve sadece iki) elemanı varsa, o zaman $a \approx 2$;
4) üç (ve sadece üç) elemanı varsa, o zaman $a \approx 3$.

Ayrıca

$$0 \not\approx 1, \qquad 0 \not\approx 2, \qquad 0 \not\approx 3, \qquad 1 \not\approx 2, \qquad 1 \not\approx 3, \qquad 2 \not\approx 3.$$

Ancak herhangi iki eşlenik doğal sayı eşit olmalı mı? Bu soruyu, 5 numaralı sayfada sormuştuk.

Teorem 71. *Her doğal sayı, ya* 0 *ya bir doğal sayının ardılıdır.*

Alıştırma 40. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 72. *İki doğal sayı birbiriyle eşlenikse, birbirine eşittir:*

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x \approx y \Rightarrow x = y).$$

Yani her doğal sayı, sonlu bir kardinaldir.

Kanıt. Tümevarımla her n doğal sayısı için

$$\forall x\ (x \in \omega \land x \approx n \Rightarrow x = n)$$

cümlesini kanıtlayacağız. $n = 0$ ise doğrudur. $n = m$ ise doğru olsun, ve bir ℓ doğal sayısı için $m' \approx \ell$ olsun. O zaman ℓ boş değil. Son teoreme göre ℓ bir ardıl olmalı. $\ell = k'$ olsun. m' sayısından k' sayısına giden bir f eşlemesi vardır. Eğer $f(m) = k$, o zaman $f \smallsetminus \{(m, k)\}$, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Eğer $f(m) \neq k$, o zaman

$$\big\{(x, y) \colon x \in m \smallsetminus \{f^{-1}(k)\} \land y = f(x)\big\} \cup \big\{(f^{-1}(k), f(m))\big\}$$

bağıntısı, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Öyleyse her durumda $m \approx k$. Hipotezimize göre $m = k$ olmalı, dolayısıyla $m' = \ell$. Kanıt bitti. □

Kısaca $\omega \subseteq \mathbf{KN}$.

5.3 Sayılabilme

Tekrar $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun.

1. Eğer $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{B}$ ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfını **örten** bir göndermedir ($\boldsymbol{F}$ *is onto* $\boldsymbol{B}$), ve
$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$$
ifadesini yazabiliriz.
2. Eğer
$$\forall x\, \forall y\, (x \in \boldsymbol{A} \land y \in \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y) \Rightarrow x = y)$$
ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, **birebir** (*one-to-one*) veya **injektif** (*injective*) bir göndermedir; ayrıca $\boldsymbol{F}$, bir **gömmedir** (*embedding*). Bu durumda
$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B} \qquad \text{veya} \qquad \boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\preccurlyeq} \boldsymbol{B}$$
ifadesini yazabiliriz. Bir *a kümesinden* $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir gömme varsa, bu gömme de bir kümedir, ve
$$a \preccurlyeq \boldsymbol{B}$$
ifadesini yazarız.
3. Eğer $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfını örten bir gömmeyse, o zaman
$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \xrightarrow{\approx} \boldsymbol{B}$$
ifadesini yazarız.* Bu durumda $\boldsymbol{F}$, bir eşlemedir.

Teorem 73. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*
$$a \preccurlyeq a, \qquad a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c, \qquad a \approx b \Rightarrow a \preccurlyeq b$$
cümleleri doğrudur.

---

*$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ ifadesi de mümkündür.

Alıştırma 41. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 74. *Bir sınıf, bir kümeye gömülebilirse, bu sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 42. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 75. *ω, bir kardinaldir, yani*

$$\omega \in \mathbf{KN}.$$

Kanıt. Tümevarımla her m doğal sayısı için $f\colon m \rightarrowtail \omega$ ise $f[m]$ kümesinin en büyük n elemanı vardır, dolayısıyla $n+1 \in \omega \smallsetminus f[m]$; özel olarak f, ω kümesini örten değildir. □

Teoremin sonucu olarak ω kümesiyle eşlenik her küme, sonsuzdur. Öyle bir küme, **sayılabilir sonsuzluktadır** (*countably infinite*). Sonlu veya sayılabilir sonsuzluktaki bir küme, **sayılabilir** (*countable*). Diğer kümeler ve sınıflar, **sayılamaz sonsuzluktadır** (*uncountably infinite*) veya **sayılamaz** (*uncountable*). Aslında her küme olmayan sınıf, sayılamaz.

Teorem 76. *Bir a kümesi için aşağıdaki koşullar, birbirine denktir.*

1. *a sayılabilir.*
2. *$a \preccurlyeq \omega$.*
3. *Ya a boş, ya da ω kümesinden a kümesini örten bir gönderme vardır.*

Kanıt. Eğer $f\colon a \xrightarrow{\approx} \omega$ ise, o zaman $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega$ ve $f^{-1}\colon \omega \twoheadrightarrow a$.

Eğer $n \in \omega$ ve $f\colon a \xrightarrow{\approx} n$ ise, o zaman $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega$; ayrıca ya $n = 0$ ya da

$$f^{-1} \cup \{(x,0)\colon n \leqslant x < \omega\}\colon \omega \twoheadrightarrow a.$$

Şimdi $f\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega$ olsun. O zaman $f[a]$, $\in$ tarafından iyi sıralanmıştır, dolayısıyla 69 numaralı teoreme göre $f[a]$ kümesinden bir α ordinaline giden ve

$$x \in y \Leftrightarrow g(x) \in g(y)$$

koşulunu sağlayan bir g eşlemesi vardır. Teoremin kanıtındaki gibi $f[a]$ kümesinin tüm n elemanları için

$$g(n) = \{g(k)\colon k \in f[a] \cap n\}.$$

Eğer $f[a] \cap n$ kümesinin tüm k elemanı için $g(k) \leqslant k$ ise, o zaman $g(n) \leqslant n$. Sonuç olarak, $f[a]$ kümesi iyi sıralanmış olduğundan her n elemanı için $g(n) \leqslant n$, dolayısıyla $\alpha \leqslant \omega$ ve $g \circ f\colon a \xrightarrow{\approx} \alpha$.

Son olarak $h\colon \omega \twoheadrightarrow a$ olsun. O zaman

$$x \mapsto \min\{y \in \omega\colon h(y) = x\}\colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega,$$

dolayısıyla, gösterdiğimiz gibi, a sayılabilir. □

Sayılamaz sonsuzlukta bir küme biliyor muyuz?

5.3.1 Toplama

Toplama veya ikili bileşim işlemiyle sayılamaz sonsuzluktaki kümeler oluşturulamaz.

Tanıma göre tüm a ile b kümeleri için

$$a \sqcup b = (a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\}).$$

Bu bileşim, a ile b kümelerinin **ayrık bileşimidir** (*disjoint union*).

Teorem 77. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha + \beta \approx \alpha \sqcup \beta.$$

Kanıt. Bu kanıt için tümevarım kullanmayacağız. $\alpha \leqslant \gamma$ ise $\boldsymbol{F}(\gamma)$,

$$\alpha + x = \gamma$$

denkleminin tek çözümü olsun. O zaman

$$\big\{\big(x,(x,0)\big)\colon x < \alpha\big\} \cup \Big\{\Big(x,\big(\boldsymbol{F}(x),1\big)\Big)\colon \alpha \leqslant x < \alpha + \beta\Big\},$$

$\alpha+\beta$ toplamından $(\alpha\times\{0\})\cup(\beta\times\{1\})$ bileşimine giden bir eşlemedir. □

Teorem 78. $\omega + \omega \approx \omega$.

Kanıt. $(x,y) \mapsto 2x+y$ göndermesi, $(\omega\times\{0\})\cup(\omega\times\{1\})$ bileşiminden ω kümesine giden bir eşlemedir. □

Teorem 79. *$\alpha \approx \beta$ ve $\gamma \approx \delta$ ise $\alpha + \gamma \approx \beta + \delta$.*

Alıştırma 43. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 80. *a ile b sayılabilirse $a \cup b$ bileşimi de sayılabilir.*

Alıştırma 44. Teoremi kanıtlayın.

5.3.2 Çarpma

Çarpmayla sayılamaz sonsuzluktaki kümeler oluşturulamaz.

Teorem 81. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta.$$

Kanıt. Eşleme, $\big\{\big(x,(y,z)\big)\colon x < \alpha\cdot\beta \land y < \alpha \land x = \alpha\cdot z + y\big\}$. □

Teorem 82. $\omega \cdot \omega \approx \omega$.

Kanıt. $\big\{\big((x,y),z\big)\colon (x>y \Rightarrow z=x^2+y) \land (x \leqslant y \Rightarrow z = x^2+x+y)\big\}$ sınıfı, $\omega\times\omega$ çarpımından ω kümesine giden bir eşleme tanımlar. □

Teorem 83. *$\alpha \approx \beta$ ve $\gamma \approx \delta$ ise $\alpha\cdot\gamma \approx \beta\cdot\delta$.*

Alıştırma 45. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 84. *a ile b sayılabilirse $a\times b$ çarpımı da sayılabilir.*

Alıştırma 46. Teoremi kanıtlayın.

5.3.3 Kuvvet alma

Ordinal kuvvetleri alarak sonsuzluktaki kümeler oluşturulamaz.

Tüm α ile β ordinalleri için, tanım kümesi β ordinalinin sonlu bir altkümesi olan ve değer kümesi α ordinalinin bir altkümesi olan göndermelerin sınıfı,

$$\exp(\alpha,\beta)$$

olsun.*

Teorem 85. *Tüm α ile β ordinalleri için*

$$\alpha^\beta \approx \exp(\alpha,\beta).$$

Kanıt. γ_α, 59 numaralı teoremdeki gibi olunca, $\{(\gamma,\gamma_\alpha)\colon \gamma<\alpha^\beta\}$ kümesi, α^β kümesinden $\exp(\alpha,\beta)$ kümesine giden bir eşlemedir. □

Teorem 86. *$\alpha \approx \beta$ ve $\gamma \approx \delta$ ise $\alpha^\gamma \approx \beta^\delta$.*

Alıştırma 47. Teoremi kanıtlayın.

*$\exp(\alpha,\beta)$ ifadesi, ve aşağıdaki 85 numaralı teorem, Levy'nin [13, IV.2.10] kitabından alınmıştır.

$n \in \omega$ ise ${}^n b$ sınıfının bir elemanı, $(a_0, \dots, a_{n-1})$ olarak yazılabilir. O halde

$$f = (a_0, \dots, a_{n-1}) \Rightarrow f(i) = a_i.$$

Herhangi bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}_\omega(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$ sınıfının *sonlu* altkümelerinin sınıfı olsun.

Teorem 87. $\omega^\omega \approx \omega$.

Kanıt. $\omega^\omega \approx \exp(\omega, \omega)$, ve $\exp(\omega, \omega) \subseteq \mathscr{P}_\omega(\omega \times \omega)$. Ayrıca $\omega \times \omega \approx \omega$ olduğundan $\mathscr{P}_\omega(\omega \times \omega) \approx \mathscr{P}_\omega(\omega)$. Kısaca

$$\omega^\omega \approx \exp(\omega, \omega) \subseteq \mathscr{P}_\omega(\omega \times \omega) \approx \mathscr{P}_\omega(\omega).$$

Şimdi $f\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. Özyinelemeyle $\omega \smallsetminus \{0\}$ kümesinde bir $n \mapsto g_n$ göndermesini tanımlayacağız. Aslında $g_n\colon {}^n\omega \to \omega$ olacaktır. Özyineli tanıma göre

$$g_1\big((x)\big) = x, \qquad g_{n+1}\big((x_0, \dots, x_n)\big) = f\big((x_0, \dots, x_{n-1}), x_n\big).$$

Tümevarımdan $1 \leqslant n < \omega$ ise $g_n\colon {}^n\omega \xrightarrow{\approx} \omega$, dolayısıyla ${}^n\omega$ ile g_n sınıfları, kümedir.

$\mathscr{P}_\omega(\omega)$ sınıfından $\bigcup\{{}^n\omega\colon n \in \omega\}$ bileşimine giden öyle bir h göndermesi vardır ki $h(0) = 0$, ve $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \omega$ ise

$$h\big(\{a_0, a_1, \dots, a_n\}\big) = (a_0, \dots, a_n).$$

Öyleyse h, bir gömmedir. Ayrıca

$$(b_0, \dots, b_{n-1}) \mapsto f\Big(n, g_n\big((b_0, \dots, b_{n-1})\big)\Big)$$

göndermesi, $\bigcup\{{}^n\omega\colon n \in \omega\}$ bileşiminden ω kümesine giden bir gömmedir. Kısaca

$$\mathscr{P}_\omega(\omega) \preccurlyeq \bigcup\{{}^n\omega\colon n \in \omega\} \preccurlyeq \omega.$$

Gösterdiklerimiz hep birlikte ω^ω kümesinden ω kümesine giden bir gömme olduğunu kanıtlar. □

5.4 Büyüklük

Bir a kümesinden bir $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir gömme varsa, ama eşleme yoksa,

$$a \prec \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Öyleyse

$$a \prec \boldsymbol{B} \text{ denktir } a \preccurlyeq \boldsymbol{B} \land a \not\approx \boldsymbol{B}.$$

O zaman bir a kümesi sonludur ancak ve ancak $a \prec \omega$. 73 numaralı teoremin özel durumu vardır:

$$a \prec b \land b \prec c \Rightarrow a \preccurlyeq c.$$

Ama $a \prec b \land b \prec c$ ise $a \prec c$ sonucuna varabilir miyiz?

Bir a kümesinin **büyüklüğü** (*size*), $\{x\colon x \approx a\}$ denklik sınıfı olarak düşünülebilir. a boş değilse $\{x\colon x \approx a\}$ sınıfı, küme değildir. Hâlâ büyüklüklerin sıralanabilir olup olmadığını sorabiliriz. Eğer $a \prec b$ ise, o zaman $\{x\colon x \approx a\}$ büyüklüğü, $\{x\colon x \approx b\}$ büyüklüğünden küçük gibidir; ama $\boldsymbol{A}$ küçük $\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{B}$ küçük $\boldsymbol{C}$ ise $\boldsymbol{A}$ küçük $\boldsymbol{C}$ doğru mudur?

Her küme iyi sıralanabilirse, o zaman her büyüklük, bir ve tek bir kardinal içerir, dolayısıyla büyüklükler, içerilen kardinallere göre sıralanabilir. Aslında, aşağıda göreceğimiz gibi, Seçim Aksiyomunu kullanmadan büyüklükler hâlâ sıralanabilir, ancak *iyi* sıralanamaz.

Teorem 88 (Schröder–Bernstein)**.** *Tüm a ve b kümeleri için*

$$a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Kanıt (Zermelo [28]). $f\colon a \rightarrowtail b$ ve $g\colon b \rightarrowtail a$ olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)[a] \subseteq g[b] \subseteq a, \qquad g[b] \approx b.$$

Biz $a \approx g[b]$ eşlenikliğini kanıtlayacağız. Sonuç olarak $a \approx b$ olacaktır.

a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir h eşlemesini tanımlayabilirsek, herhalde a kümesinin bir c altkümesi için

$$h = \{(x, x)\colon x \in c\} \cup \{(x, (g \circ f)(x))\colon x \in a \smallsetminus c\} \tag{$*$}$$

olacaktır. O halde

$$c \cup (g \circ f)[a \smallsetminus c] = g[b] \tag{$\dagger$}$$

olmalıdır, çünkü $h[a] = g[b]$ olacaktır. Ayrıca

$$c \cap (g \circ f)[a \smallsetminus c] = \varnothing \tag{$\ddagger$}$$

olmalıdır, çünkü h bir gömme olacaktır. O zaman

$$c = g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a \smallsetminus c]$$

olmalıdır. $g \circ f$ birebir olduğundan

$$(g \circ f)[a \smallsetminus c] = (g \circ f)[a] \smallsetminus (g \circ f)[c],$$

dolayısıyla

$$c = g[b] \smallsetminus \big((g \circ f)[a] \smallsetminus (g \circ f)[c]\big)$$

olmalıdır. $(g \circ f)[c] \subseteq (g \circ f)[a] \subseteq g[b]$ olduğundan

$$c = \big(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\big) \cup (g \circ f)[c] \tag{§}$$

olmalıdır. Ters olarak, eğer c, (§) satırındaki gibiyse, o zaman (†) ile (‡) satırları doğrudur, ve sonuç olarak, $g \circ f$ birebir olduğundan, $(*)$ satırındaki gibi h göndermesi, a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir eşlemedir.

Şimdi öyle bir c kümesini bulmalıyız. O zaman

$$\boldsymbol{A} = \big\{x \colon \big(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\big) \cup (g \circ f)[x] \subseteq x \subseteq a\big\}$$

olsun. Bu durumda $a \in \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir küme olmalıdır. Bu küme c olsun. O zaman $c \in \boldsymbol{A}$ olmalıdır (neden?). Eğer (§) satırı yanlış ise, o zaman

$$d \in c \smallsetminus \Big(\big(g[b] \smallsetminus (g \circ f)[a]\big) \cup (g \circ f)[c]\Big)$$

cümlesini sağlayan bir d vardır. Bu durumda

$$c \smallsetminus \{d\} \in \boldsymbol{A}, \qquad \bigcap \boldsymbol{A} \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad c \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad d \notin c.$$

Bu bir çelişkidir. O zaman (§) satırı doğru olmalıdır, ve $a \approx g[b]$, dolayısıyla $a \approx b$. □

Teorem 89. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \prec b \land b \prec c \Rightarrow a \prec c.$$

Alıştırma 48. Teoremi kanıtlayın.

5.5 Sayılamaz sonsuzluk

Teorem 90 (Cantor)**.** *Her a kümesi için*

$$a \prec \mathscr{P}(a).$$

Kanıt. $\{(x,\{x\})\colon x\in a\}$ göndermesinin sayesinde $a \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$. Şimdi $f\colon a \rightarrowtail \mathscr{P}(a)$ ve
$$b = \{x \in a\colon x \notin f(x)\}$$
olsun. O zaman a kümesinin her c elemanı için
$$c \in b \Leftrightarrow c \notin f(c).$$
Öyleyse $b \neq f(c)$. Dolayısıyla $b \notin f[a]$, ve f, eşleme değildir. O zaman $a \not\approx \mathscr{P}(a)$. □

Cantor'un Teoremi, küme olmayan sınıflar için yanlıştır. Mesela
$$\mathbf{V} \approx \mathscr{P}(\mathbf{V});$$
aslında $\mathbf{V} = \mathscr{P}(\mathbf{V})$.

Alıştırma 49. Cantor'un Teoreminin kanıtında, a kümesinin küme olduğunu nasıl kullandık?

Sonsuz bir kümenin kuvvet sınıfı bir kümeyse, bu küme sayılamaz.

AKSİYOM 8 (Kuvvet Kümesi). *Her kümenin kuvvet sınıfı, bir kümedir, yani*
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(z \in y \Leftrightarrow \forall w\ (w \in z \Rightarrow w \in x)\bigr)$$
cümlesi doğrudur.

Teorem 91 (Hartogs). *Her küme için, bu kümeye gömülemeyen bir ordinal vardır.*

Kanıt. a bir küme olsun, ve b, $\mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a \times a)$ çarpımın öyle bir altkümesi olsun ki çarpımın her (c,s) elemanı için
$$(c,s) \in b \Leftrightarrow s,\ c \text{ kümesini iyi sıralar.}$$

Eğer $(c, s) \in b$ ve $\alpha < \operatorname{ord}(c, s)$ ise, c kümesinin bir d altkümesi için

$$\operatorname{ord}(d, s) = \alpha.$$

Öyleyse $\{\operatorname{ord}(c, s) \colon (c, s) \in b\}$ geçişlidir, dolayısıyla bir β ordinaline eşittir. O zaman β, a kümesine gömülemez. Aslında $f \colon \beta \xrightarrow{\preccurlyeq} a$ ise

$$c = f[\beta], \qquad s = \big\{\big(f(x), f(y)\big) \colon x < y < \beta\big\}$$

olsun. O zaman $(c, s) \in b$ ve $\operatorname{ord}(c, s) = \beta$, dolayısıyla $\beta \in \beta$, ki bu imkânsızdır. □

Şimdi her κ kardinali için, bu kardinale gömülemeyen *en küçük* ordinal vardır. Bu ordinal, bir kardinal olmalıdır. Bu kardinale, κ kardinalinin **ardılı** (veya *kardinal ardılı*) denir, ve bu ardıl

$$\kappa^+$$

ifadesiyle gösterilir. Böylece $\kappa < \kappa^+$, ve her λ kardinali için ya $\lambda \leqslant \kappa$ ya da $\kappa^+ \leqslant \lambda$.

Teorem 92. *Elemanları kardinal olan bir kümenin supremumu, bir kardinaldir.*

Alıştırma 50. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi

$$\aleph_0 = \omega,$$
$$\aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+,$$
$$\gamma \text{ limit} \Rightarrow \aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\xi \colon \xi < \gamma\}$$

koşulları, **ON** sınıfında bir $x \mapsto \aleph_x$ işlemini tanımlar. (Burada $\aleph$, İbranice *alef* harfidir.)

Teorem 93. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ işlemi,* **KN** $\smallsetminus \omega$ *sınıfını örten ve normal bir göndermedir.*

Alıştırma 51. Teoremi kanıtlayın.

5.6 Toplama ve çarpma

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{kard}(\kappa + \lambda), \qquad \kappa \otimes \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \cdot \lambda).$$

O zaman 77 ve 81 numaralı teoremler sayesinde

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \sqcup \lambda), \qquad \kappa \otimes \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \times \lambda).$$

Sonraki teoremler sayesinde kardinal hesapmaları kolaydır.

Teorem 94. *Tüm κ ile λ kardinalleri için*

$$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa, \qquad \kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa.$$

Alıştırma 52. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 95. $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ *ise*

$$\lambda \leqslant \kappa \oplus \lambda \leqslant \kappa \otimes \lambda \leqslant \lambda \otimes \lambda.$$

Alıştırma 53. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 96. $\boldsymbol{F}$*, ordinallerde bir normal işlem, ve*

$$\alpha \approx \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \approx \boldsymbol{F}(\beta) \tag{¶}$$

ise, o zaman tüm sonsuz κ kardinali için

$$\boldsymbol{F}(\kappa) = \kappa.$$

Kanıt. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan, 55 numaralı teorem sayesinde $\kappa \leqslant \boldsymbol{F}(\kappa)$. Mümkünse $\kappa < \boldsymbol{F}(\kappa)$ olsun. κ bir ordinal ardılı (neden?) ve $\boldsymbol{F}$

normal olduğundan bir α için $\kappa < \boldsymbol{F}(\alpha)$. O halde $\lambda = \mathrm{kard}(\alpha)$ ise, (¶) satırındaki koşula göre

$$\lambda < \kappa \leqslant \boldsymbol{F}(\lambda).$$

Böylece $\{x\colon x \in \mathbf{KN} \wedge x < \boldsymbol{F}(x)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur, dolayısıyla sınıf boştur. □

Teorem 97. λ *sonsuz ise*

$$\lambda = \lambda \otimes \lambda.$$

Kanıt. $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ çarpımı, öyle bir $<$ bağıntısı tarafından iyi sıralanır ki

$$\mathrm{maks}(\alpha, \beta) < \mathrm{maks}(\gamma, \delta) \Rightarrow (\alpha, \beta) < (\gamma, \delta).$$

Mesela

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \mathrm{maks}(\alpha, \beta) < \mathrm{maks}(\gamma, \delta) \vee \beta < \delta < \gamma = \alpha \\ \vee (\beta < \alpha = \delta \wedge \gamma \leqslant \delta) \vee \alpha < \gamma \leqslant \delta = \beta\end{aligned}$$

olsun, onun için

$$\alpha \times \alpha = \big\{(x, y)\colon (x, y) \in \mathbf{ON} \times \mathbf{ON} \wedge (x, y) < (\alpha, 0)\big\}.$$

O zaman $\xi \mapsto \mathrm{ord}(\xi \times \xi, <)$ göndermesi, son teoremdeki gibi bir $\boldsymbol{F}$ işlemidir, dolayısıyla her sonsuz λ için $\lambda = \boldsymbol{F}(\lambda)$, ve özel olarak $\lambda \approx \lambda \times \lambda$. □

Sonuç olarak

$$\aleph_\beta \oplus \aleph_\gamma = \aleph_\beta \otimes \aleph_\gamma = \aleph_{\mathrm{maks}(\alpha,\beta)}.$$

5.7 Ordinaller Kuvvetlerinin kardinalleri

Teorem 98. *α sonsuz ise*

$$\mathscr{P}_\omega(\alpha) \approx \alpha^\omega \approx \alpha.$$

Kanıt. Eğer $\omega \leqslant \alpha$ ise, 87 numaralı teoremin kanıtındaki gibi

$$\alpha \preccurlyeq \alpha^\omega \approx \exp(\alpha, \omega) \subseteq \mathscr{P}_\omega(\alpha\times\omega) \approx \mathscr{P}_\omega(\alpha) \preccurlyeq \bigcup\{{}^x\alpha\colon x \in \omega\} \preccurlyeq \alpha$$

çünkü $\alpha \times \omega \approx \alpha$ ve $\alpha \times \alpha \approx \alpha$. □

Teorem 99. *α ile β sonsuz ise*

$$\alpha^\beta \approx \operatorname{maks}(\alpha, \beta).$$

Kanıt. Eğer $\big\{(\gamma_0, \delta_0), \dots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\big\} \in \exp(\alpha, \beta)$ ve $\gamma_0 < \dots < \gamma_{n-1}$ ise, o zaman

$$f\Big(\big\{(\gamma_0, \delta_0), \dots, (\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})\big\}\Big) = \big(\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}, (\delta_0, \dots, \delta_{n-1})\big)$$

olsun. O halde $f\colon \exp(\alpha, \beta) \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}_\omega(\beta) \times \exp(\alpha, \omega)$, dolayısıyla

$$\alpha^\beta \approx \exp(\alpha, \beta) \preccurlyeq \mathscr{P}_\omega(\beta) \times \exp(\alpha, \omega) \approx \beta \times \alpha \approx \operatorname{maks}(\alpha, \beta).$$ □

5.8 Kontinü Hipotezi

$\mathbb{N} = \{x \in \omega\colon x \geqslant 1\}$ olsun, ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çarpımında $\sim$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

koşulunu sağlayan ikili bir bağıntı olsun. O zaman $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise

$$a/b = \frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon (x, y) \sim (a, b)\}$$

olsun, ve

$$\mathbb{Q}^+ = \{x/y \colon (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

olsun. O zaman $x \mapsto x/1$ göndermesi, $\mathbb{N}$ kümesini $\mathbb{Q}^+$ kümesine gömer. İlkokulda öğrendiğimiz gibi $\mathbb{Q}^+$ kümesinde

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

ve

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

tanımları yapılabilir. O zaman $<$, $\mathbb{Q}^+$ kümesinin doğrusal sıralamasıdır, ve burada $a < b$ ise

$$a < \frac{2a + b}{3} < \frac{a + 2b}{3} < b.$$

Şimdi $\mathbb{R}^+$,

$$0 \subset a \subset \mathbb{Q}^+,$$
$$x < y \land y \in a \Rightarrow x \in a,$$
$$y \in a \Rightarrow \exists z \; (y < z \land z \in a)$$

koşullarını sağlayan a kümelerinin kümesi olsun. Bu $\mathbb{R}^+$ kümesine **kontinü** (*continuum*) denebilir.

Teorem 100. $\mathbb{R}^+ \approx \mathscr{P}(\omega)$.

Kanıt. $n \in \omega$ ve $\sigma \in {}^n2$ ise

$$f(\sigma) = 1 + \sum_{\xi<n} \frac{2\sigma(\xi)}{3^\xi}$$

olsun. Yani $f(0) = 1$ olsun, ve $\sigma \in {}^m2$ ise

$$f\Big(\sigma \cup \big\{(m,0)\big\}\Big) = a_\sigma, \qquad f\Big(\sigma \cup \big\{(m,1)\big\}\Big) = a_\sigma + 2/3^m$$

olsun. Şimdi $\sigma \in {}^\omega2$ ise

$$g(\sigma) = \Big\{x \in \mathbb{Q}^+ : \exists x\ \big(x \in \omega \land x < f(\sigma \restriction x)\big)\Big\}$$

olsun. O zaman $g\colon {}^\omega2 \to \mathbb{R}^+$. Aslında g bir gömmedir, çünkü $\sigma \restriction n = \tau \restriction n$ ama $\sigma(n) = 0$ ve $\tau(n) = 1$ ise, o zaman

$$f(\sigma) + 1/3^n \in g(\tau) \smallsetminus g(\sigma).$$

Ayrıca $\mathbb{Q}^+ \approx \omega$ ve $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q}^+)$, dolayısıyla

$${}^\omega2 \preccurlyeq \mathbb{R}^+ \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}^+) \approx \mathscr{P}(\omega) \approx {}^\omega2.$$

Schröder–Bernstein Teoremine göre ${}^\omega2 \approx \mathbb{R}^+$. □

Kontinü Hipotezi (*Continuum Hypothesis*) veya KH,

$$\aleph_1 \approx \mathscr{P}(\omega)$$

cümlesidir. **Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi** (*Generalized Continuum Hypothesis*) veya GKH,

$$\forall x\ \forall y\ (\omega \preccurlyeq x \prec y \preccurlyeq \mathscr{P}(x) \Rightarrow y \approx \mathscr{P}(x))$$

cümlesidir. GKH $\Rightarrow$ KH gerektirmesinin doğruluğu, apaçık değildir.

Sonraki teorem için

$$\mathscr{P}^0(a) = a, \qquad\qquad \mathscr{P}^{n+1}(a) = \mathscr{P}(\mathscr{P}^n(a))$$

özyineli tanımını yaparız.

Teorem 101. GKH *doğruysa, her küme iyi sıralanabilir.*

Kanıt. Her a kümesi, $\mathscr{P}(a \sqcup \omega)$ kümesine gömülebilir. Aslında

$$x \mapsto \{(x,0)\} \colon a \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(a \sqcup \omega).$$

Bu nedenle $\mathscr{P}(a \sqcup \omega)$ iyi sıralanabilirse, a kümesi de iyi sıralanabilir. Ayrıca $a \sqcup \omega \approx a \sqcup \omega'$, dolayısıyla

$$\mathscr{P}(a \sqcup \omega) \approx \mathscr{P}(a \sqcup \omega') \approx \mathscr{P}(a \sqcup \omega) \sqcup \mathscr{P}(a \sqcup \omega)$$

(neden?). Öyleyse $a \approx a \sqcup a$ eşlenikliğini varsayabiliriz. O zaman Schröder–Bernstein Teoremine göre $a \sqcup \{0\} \approx a$, dolayısıyla her n doğal sayısı için

$$\mathscr{P}^n(a) \approx \mathscr{P}^n(a) \sqcup \mathscr{P}^n(a).$$

Şimdi $b \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$ olsun. O zaman

$$a \preccurlyeq b \sqcup a \preccurlyeq \mathscr{P}(a) \sqcup \mathscr{P}(a) \approx \mathscr{P}(a).$$

GKH varsayımımıza göre $a \approx b \sqcup a$ veya $b \sqcup a \approx \mathscr{P}(a)$. Birinci durumda $b \preccurlyeq a$. İkinci durumda

$$b \sqcup a \approx \mathscr{P}(a) \sqcup \mathscr{P}(a) \approx \mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a).$$

Şimdi $f \colon b \sqcup a \xrightarrow{\approx} \mathscr{P}(a) \times \mathscr{P}(a)$ olsun, ve π, $(x,y) \mapsto x$ göndermesi olsun. Cantor'un Teoremine göre $\pi\big[f[a \times \{1\}]\big] = \mathscr{P}(a)$ olamaz, dolayısıyla $\mathscr{P}(a) \smallsetminus \pi\big[f[a \times \{1\}]\big]$ farkının c elemanı vardır. Eğer

$$d = \{x \in b \colon \pi \circ f(x) = c\}$$

ise, o zaman $f[d] = \{c\} \times \mathscr{P}(a)$, dolayısıyla

$$d \approx \mathscr{P}(a), \qquad \mathscr{P}(a) \preccurlyeq b, \qquad b \approx \mathscr{P}(a).$$

Kısaca $a \sqcup a \approx a$ ve $b \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$ ise, ya $b \approx \mathscr{P}(a)$ ya da $b \preccurlyeq a$.

Hartogs'un Teoremine göre öyle bir β ordinali vardır ki $\beta \preccurlyeq \mathscr{P}^4(a)$ (neden?), ama a, β ordinaline gömülemez. O zaman β, ya $\mathscr{P}^4(a)$, ya $\mathscr{P}^3(a)$, ya $\mathscr{P}^2(a)$, ya $\mathscr{P}(a)$ ile eşleniktir. Her durumda $a \preccurlyeq \beta$, dolayısıyla a iyi sıralanabilir. □

Her küme iyi sıralanabilirse, her kümenin ordinali vardır. Özel olarak $\mathscr{P}(\omega)$ kümesinin $\aleph_\beta$ ordinali vardır, ve $\beta \neq 0$, dolayısıyla

$$\omega \prec \aleph_1 \preccurlyeq \mathscr{P}(\omega).$$

O zaman GKH $\Rightarrow$ KH doğrudur.

5.9 Kardinaller kuvvetleri

Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezini kabul etmeyeceğiz, ama son teoremin sonucunu kabul edeceğiz. Seçim Aksiyomunun çok biçimleri vardır; ama bizim için en uygun biçimi, aşağıdadır.

AKSİYOM 9 (Seçim)**.** *Her küme iyi sıralanabilir.*

Her *sayılabilen* zaten iyi sıralanabildi. Şimdi her sayılamaz sonsuzluktaki küme iyi sıralanabilir, yani bundan 0 adlı bir elemanı seçilebilir, ve ondan sonra 1 adlı elemanı, vesaire.

Öyleyse her kümenin kardinali vardır. Kuvvet Kümesi Aksiyomunun sayesinde ${}^\beta\alpha$ sınıfı bir kümedir, çünkü

$${}^\beta\alpha \subseteq \mathscr{P}(\beta \times \alpha).$$

O zaman
$$\kappa^\lambda = \mathrm{kard}({}^\lambda\kappa)$$
tanımını yapabiliriz. (Bu kuvvet, *ordinaller* kuvveti değildir.)

Teorem 102. *Tüm κ, λ, μ, ve ν kardinalleri için*

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \Rightarrow 0^\lambda &= 0, \\ \kappa^0 &= 1, \\ 1^\lambda &= 1, \\ \kappa^1 &= \kappa, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu, \\ \kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^\lambda)^\mu, \\ \kappa \leqslant \mu \wedge \lambda \leqslant \nu &\Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant \mu^\nu. \end{aligned}$$

Alıştırma 54. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 103. *Her κ için*
$$\kappa < 2^\kappa.$$

Alıştırma 55. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 104. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \mathrm{maks}(\kappa, \lambda)$ *olsun. O zaman*
$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \tag{$\|$}$$
$$\lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa. \tag{$**$}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla
$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda.$$
Ayrıca $\lambda \leqslant \kappa$ ise κ sonsuzdur, dolayısıyla
$$\kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^\kappa.$$
□

Teoremin ($\|$) ile ($**$) gerektirmelerinde $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ile $\lambda \leqslant \kappa$ koşulları, aynı anda doğru olabilir. Bu durumda ($\|$) gerektirmesi, diğerinden daha çok bilgi verir. Böylece ($**$) satırındaki cümlenin yerine

$$2^\lambda < \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa$$

cümlesi konulabilir. Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
$$2^{\aleph_0} < \kappa \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^{\aleph_0} \leqslant 2^\kappa.$$

Şimdi $\lambda \leqslant \kappa$ (veya $2^\lambda < \kappa$) durumunu iki duruma böleceğiz.

5.9.1 Kofinallık

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinal olduğundan

$$\kappa = \sup\{\xi \colon \xi < \kappa\} = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_x \colon x \in \omega\}.$$

Teorem 105. *$b \subseteq \alpha$ olsun. Aşağıdaki koşullar, birbirine denktir.*

1. *α limit veya 0 ise $\alpha = \sup(b)$, ve $\alpha = \gamma + 1$ ise $\gamma \in b$.*
2. *Her durumda*

$$\alpha = \sup_{\xi\in b}(\xi + 1) = \bigcup_{\xi\in b}\{\eta \in \alpha \colon \eta \leqslant \xi\}.$$

3. *α ordinalinin her γ elemanı için, b kümesinin $\gamma \leqslant \delta$ koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır.*

Alıştırma 56. Teoremi kanıtlayın.

Teoremdeki koşullar doğruysa b, α ordinalinde **sınırsızdır** (*unbounded*).* Örneğin bir ordinal, kendisinde sınırsızdır. Bir ordinalin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal,

$$\mathrm{kf}(\alpha)$$

olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x) \colon x \subseteq \alpha \wedge \sup_{\eta \in x}(\eta + 1) = \alpha\}.$$

O zaman

$$\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \alpha, \qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1,$$

ve ayrıca†

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\Bigl\{\beta \colon \exists f\ \Bigl(f \colon \beta \to \alpha \wedge \sup_{\xi < \beta}\bigl(f(\xi) + 1\bigr) = \alpha\Bigr)\Bigr\}.$$

Teorem 106. *Her α ordinali için, kofinalliğinden giden* kesin artan *ve değer kümesi α ordinalinde sınırsız olan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f \colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve değer kümesi α ordinalinde sınırsız olsun. O zaman $\mathrm{kf}(\alpha)$ kümesinde bir g göndermesinin

$$g(\beta) = \mathrm{maks}\Bigl(f(\beta), \sup_{\xi < \beta}\bigl(g(\xi) + 1\bigr)\Bigr)$$

*[15, 13. böl.] kaynağında b, α ordinalinin bir *kofinal* altkümesidir.

†Bu denklikte f, bir gönderme değişkenidir.

özyineli tanımı olsun. Eğer $\beta < \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinde sınırsız olamaz, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 107. *Eğer* $f\colon \alpha \to \beta$, f kesin artan, *ve* $f[\alpha]$, β *ordinalinde sınırsız ise, o zaman*

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta).$$

Kanıt. Bir γ için $g\colon \gamma \to \alpha$ olsun, ve $g[\gamma]$, α ordinalinde sınırsız olsun. $(f \circ g)[\gamma]$ görüntüsünün β ordinalinde sınırsız olduğunu kanıtlayacağız. $\delta < \beta$ olsun. Hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta \leqslant f(\theta).$$

O zaman γ ordinalinin bir ι elemanı için

$$\theta \leqslant g(\iota), \qquad\qquad \delta \leqslant f(\theta) \leqslant f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $f \circ g$ göndermesinin değer kümesi, β ordinalinde sınırsızdır. Sonuç olarak

$$\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha).$$

Şimdi $h\colon \gamma \to \beta$ olsun, ve $h[\gamma]$, β ordinalinde sınırsız olsun. $\delta < \gamma$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) \leqslant f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \gamma \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman γ ordinalinin öyle bir δ elemanı vardır ki

$$f(\theta) \leqslant h(\delta) \leqslant f(k(\delta)), \qquad\qquad \theta \leqslant k(\delta).$$

Öyleyse $k[\gamma]$, α ordinalinde sınırsızdır. Sonuç olarak $\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \mathrm{kf}(\beta)$ ve aslında $\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta)$. □

Özel olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limitse

$$\mathrm{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \mathrm{kf}(\alpha).$$

Örneğin α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta + \alpha) = \mathrm{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \mathrm{kf}(\delta^\alpha) = \mathrm{kf}(\aleph_\alpha).$$

Böylece eğer Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ eğer } \alpha_n = 0 \text{ ise}, \\ \mathrm{kf}(\omega^{\alpha_n} \cdot a_n) = \mathrm{kf}(\omega^{\alpha_n}) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa}, \\ \mathrm{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse}. \end{cases} \end{cases}$$

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$$

ise, o zaman $\mathrm{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^\alpha$.

Teorem 108. *Her α ordinali için*

$$\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f \colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^{\xi}\aleph_\alpha \colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyi sıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_\alpha$ kümesinin en küçük *gömmesi,* g_δ olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta \colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \bigl(g_\beta(\delta), g_\delta(\gamma)\bigr)$$

olsun. Böylece

$$\operatorname{kard}\bigl(\sup(f[\beta])\bigr) \leqslant \operatorname{kard}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha,$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\operatorname{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

5.9.2 Hesapmalar

Teorem 109. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \operatorname{maks}(\kappa, \lambda)$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda,$$
$$\mathrm{GKH} \wedge \lambda < \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^\lambda.$$

Kanıt. $\operatorname{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_\xi \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_\xi \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Bigl(\kappa \smallsetminus \bigl\{g_\xi(\eta) \colon \xi < f(\eta)\bigr\}\Bigr)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \operatorname{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman 108 numaralı teoremin kanıtındaki gibi

$${}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\operatorname{kard}\xi = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2.$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^\lambda \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda,$$
$$\mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa,$$
$$1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise,} \\ \kappa^+, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise,} \\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise.} \end{cases}$$

Özel olarak

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \text{ ise,} \\ \aleph_\alpha, & \text{eğer } \aleph_\beta < \mathrm{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$

Şimdi

$$\beth_0 = \omega,$$
$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha},$$
$$\beta \text{ limit} \Rightarrow \beth_\beta = \sup\{\beth_\xi \colon \xi < \beta\}$$

olsun. (Burada $\beth$, İbranice *beth* harfidir.)

Teorem 110. *Tüm κ ve λ için*

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^\lambda = \beth_{\alpha+1},$$
$$2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} \leqslant \beth_{\alpha+1}.$$

Alıştırma 57. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 111. GKH *doğrudur ancak ve ancak her* α *ordinali için*

$$\aleph_\alpha = \beth_\alpha.$$

Alıştırma 58. Teoremi kanıtlayın.

Kaynakça

[1] I. M. Bocheński. *A history of formal logic*. Translated and edited by Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1961.

[2] George Boolos. Iteration again (1989). In *Logic, Logic, and Logic*, pages 88–104. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998. With introductions and an afterword by John P. Burgess, With a preface by Burgess and Richard Jeffrey, Edited by Jeffrey.

[3] Cesare Burali-Forti. A question on transfinite numbers. In van Heijenoort [25], pages 104–12. First published 1897.

[4] Georg Cantor. Letter to Dedekind. In van Heijenoort [25], pages 113–7. First published 1899.

[5] Paul J. Cohen. *Set theory and the continuum hypothesis*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1966.

[6] Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers. I: Continuity and irrational numbers. II: The nature and meaning of numbers*. authorized translation by Wooster Woodruff Beman. Dover Publications Inc., New York, 1963.

[7] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[8] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated into English by Arthur A. Clarke, revised by William C. Waterhouse.

[9] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12):556–557, December 1938.

[10] Kurt Gödel. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(4):220–224, April 1939.

[11] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I. In van Heijenoort [25], pages 596–616. First published 1931.

[12] Casimir Kuratowski. Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, pages 161–71, 1921.

[13] Azriel Levy. *Basic set theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1979 original [Springer, Berlin].

[14] Geoffrey Lewis. *Turkish Grammar*. Oxford University Press, second edition, 2000. First edition 1967.

[15] Ali Nesin. Aksiyomatik kümeler kuramı. `http://www.acikders.org.tr/`, 2010.

[16] Ali Nesin. *Sezgisel Kümeler Kuramı*, volume 6 of *Nesin Matematik Köyü Kitaplığı*. Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2010.

[17] Giuseppe Peano. The principles of arithmetic, presented by a new method. In van Heijenoort [25], pages 83–97. First published 1889.

[18] David Pierce. Induction and recursion. *The De Morgan Journal*, 2(1):99–125, 2012. `http://education.lms.ac.uk/2012/04/david-pierce-induction-and-recursion/`.

[19] Atilla Özkırımlı. *Türk Dili, Dil ve Anlatım: Yaşayan Türkçe Üzerine Bir Deneme*. İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2001.

[20] Bertrand Russell. Letter to Frege. In van Heijenoort [25], pages 124–5. First published 1902.

[21] Wacław Sierpiński. L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix. *Fund. Math.*, 34:1–5, 1947.

[22] Thoralf Skolem. Some remarks on axiomatized set theory. In van Heijenoort [25], pages 290–301. First published 1922.

[23] Alfred Tarski. The concept of truth in formalized languages (1933). In *Logic, semantics, metamathematics*, pages 152–278. Hackett Publishing Co., Indianapolis, IN, second edition, 1983. Papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Edited and with an introduction by John Corcoran.

[24] Alfred Tarski and Steven Givant. *A formalization of set theory without variables*, volume 41 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[25] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[26] John von Neumann. On the introduction of transfinite numbers. In van Heijenoort [25], pages 346–354. First published 1923.

[27] Norbert Wiener. A simplification of the logic of relations. In van Heijenoort [25], pages 224–7. First published 1914.

[28] Ernst Zermelo. Investigations in the foundations of set theory I. In van Heijenoort [25], pages 199–215. First published 1908.

İşaretler

Dizin