Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

29 Mayıs 2014

Problem 1. $\boldsymbol{A} = \{x\colon \varphi(x)\}$ ve $\boldsymbol{R} = \{(x,y)\colon \theta(x,y)\}$ olsun.

a) $\bigcap \boldsymbol{A} = \{x\colon \psi(x)\}$ koşulunu sağlayan bir ψ formülünü bulun.

b) $\bigcap\bigcap \boldsymbol{A} = \{x\colon \rho(x)\}$ koşulunu sağlayan bir ρ formülünü bulun.

c) Hangi σ cümlesi için σ doğrudur ancak ve ancak $\boldsymbol{A}$ sınıfı $\boldsymbol{R}$ bağıntısı tarafından [doğrusal] sıralanır?

Çözüm.

a) $\forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)$.

b) $\forall y\ (\forall z\ (z \in \boldsymbol{A} \Rightarrow y \in z) \Rightarrow x \in y)$.

c) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \big(x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge z \in \boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg x\ R\ x) \wedge (x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z) \wedge (x\ R\ y \vee y\ R\ x \vee x = y)\big)$

Problem 2. Aşağıdaki her iddia için ya bir kanıt ya da bir karşıt örnek verin. Kanıtlarınızda bildiğimiz herhangi bir teoremi kullanabilirsiniz.

a) Her n doğal sayısı için $(n+1)\cdot\alpha = n\cdot\alpha+\alpha$.

b) Her n doğal sayısı için $\alpha\cdot(n+1) = \alpha+\alpha\cdot n$.

c) $(\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$.

d) $\left(\alpha^\beta\right)^{\gamma+\delta} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}\cdot\alpha^{\beta\cdot\delta}$.

Çözüm.

a) $n=1$ ve $\alpha=\omega$ bir karşıt örnektir.

b) $n=0$ ise doğrudur. $n=m$ durumunda doğru olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\big((m+1)+1\big) &= \alpha\cdot(m+1)+\alpha\\ &= (\alpha+\alpha\cdot m)+\alpha\\ &= \alpha+(\alpha\cdot m+\alpha)\\ &= \alpha+\alpha\cdot(m+1).\end{aligned}$$

c) $(\omega\cdot 2)^2 = \omega\cdot 2\cdot\omega\cdot 2 = \omega^2\cdot 2 < \omega^2\cdot 2^2$.

d) $\left(\alpha^\beta\right)^{\gamma+\delta} = \alpha^{\beta\cdot(\gamma+\delta)} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}\cdot\alpha^{\beta\cdot\delta}$.

Problem 3. Cantor normal biçimlerini bulun.

a) $1+\omega+\omega^\omega+\omega^{\omega^\omega}$.

b) $(\omega+1)^{\omega+1}$.

c) $(\omega+1)^{(\omega+1)^{\omega+1}}$.

d) $(\omega^4+\omega^3\cdot 2+\omega^2\cdot 3+\omega+4)\cdot 5$.

e) $(\omega^4 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \omega + 4) \cdot \omega^5$.

Çözüm.

a) ω^{ω^ω}.

b) $\omega^{\omega+1} + \omega^\omega$.

c) $(\omega + 1)^{\omega^{\omega+1}+\omega^\omega} = \omega^{\omega^{\omega+1}+\omega^\omega}$.

d) $\omega^4 \cdot 5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \omega + 4$.

e) ω^9.

Problem 4. Doğru mu, yanlış mı, ZFC aksiyomlarından bilinemez mi? (Yanlış cevaplar puan kaybeder.)

a) $\aleph_1 \oplus \aleph_2 = \aleph_3$.

b) $\aleph_\alpha \otimes (\aleph_\beta \oplus \aleph_\gamma) = \aleph_{\max\{\alpha,\beta,\gamma\}}$.

c) $\operatorname{kard}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

d) $\operatorname{kard}(\{x \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\colon \operatorname{kard}(x) < \aleph_0\}) = 2^{\aleph_0}$.

e) $(\beth_5)^{\beth_4} = \beth_5$.

f) $(\beth_4)^{\beth_5} = \beth_5$.

Çözüm.

a) Yanlıştır.

b) Doğrudur.

c) Bilinemez.

d) Doğrudur.

e) Doğrudur.

f) Yanlıştır.