Tihonov Teoremi

David Pierce

11 Mayıs 2012, saat 15:17

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

1 Tıkızlık

Aşağıdaki denk koşullardan birini sağlayan bir X topolojik uzay, **tıkızdır:**

1. Eğer $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ise, $\mathcal{U}$'nun her elemanı açık ise, ve
$$X = \bigcup \mathcal{U}$$
ise, o zaman $\mathcal{U}$'nun sonlu bir $\{U_1, \dots, U_n\}$ altkümesi için
$$X = U_1 \cup \dots \cup X_n$$
olur.
2. Eğer $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ise, $\mathcal{F}$'nin her elemanı kapalı ise, ve $\mathcal{F}$'nin her sonlu $\{F_1, \dots, F_n\}$ altkümesi için
$$F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$$
ise, o zaman
$$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$$
olur.

Birinci koşul, X'in her **açık örtüsünün** sonlu **alt örtüsü** olmasıdır. İkinci koşul, X'in **sonlu kesişim özelliği** olan her kapalı altkümeleri ailesinin boş olmayan kesişimi olmasıdır.

Eğer X'in altkümesi, X'in alt uzay olarak tıkız ise, bu altküme (altküme olarak) **tıkızdır.**

Örneğin, her sonlu uzay tıkızdır. Sürekli bir fonksiyon altında bir tıkız uzayın imgesi de tıkızdır. Bir tıkız uzayın her kapalı altkümesi, tıkızdır da. Bir Hausdorff uzayın her tıkız altkümesi, kapalıdır. Bir metrik uzayının her tıkız altkümesi, sınırlıdır.

Özel olarak, $\mathbb{R}$'nin her tıkız altkümesi, kapalı, sınırlı bir aralığın altkümesidir. Daha genel olarak $\mathbb{R}^n$'nin her tıkız altkümesi, bir $[-a, a]^n$ kutusunun altkümesidir. Ters de doğrudur: bu, **Heine–Borel Teoremidir.**

Bu teoremin özel bir durumunu kanıtlayalım. $\mathcal{F}$, $[a, b]$ aralığının sonlu kesişim özelliği olan kapalı altkümeleri ailesi olsun, ve $a < c < b$ olsun.

O zaman ya $\mathcal{F} \cup \{[a, c]\}$ bileşiminin ya da $\mathcal{F} \cup \{[c, b]\}$ bileşiminin sonlu kesişim özelliği vardır. Nitekim

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap [a, c] = \emptyset, \qquad F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+m} \cap [c, b] = \emptyset$$

ise $F_1 \cap \cdots \cap F_{n+m} = \emptyset$ olur.

Recursion ile, öyle bir $([a_k, b_k] \colon k \in \omega)$ dizisi vardır ki

$$\begin{gathered} 0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0 = 1, \\ \text{ya } a_k = a_{k+1} \text{ ya da } b_{k+1} = b_k, \\ a_k + \frac{1}{2^k} = b_k. \end{gathered}$$

Şimdi $c = \sup_{k \in \omega} a_k$ olsun. O zaman $c = \inf_{k \in \omega} b_k$ olur. Buraya kadar $\mathcal{F}$'nin elemanlarının kapalı olduğunu kullanmadık. $\mathbb{R}$'nin bir G kapalı altkümesi için $c \notin G$ ise, pozitif bir ϵ için

$$G \cap (c - \epsilon, c + \epsilon) = \emptyset$$

olur. $2^k > 1/\epsilon$ ise $[a_k, b_k] \subseteq (c - \epsilon, c + \epsilon)$ olur, dolayısıyla

$$G \cap [a_k, b_k] = \emptyset.$$

Öyleyse $G \notin \mathcal{F}$. Sonuç olarak $c \in \bigcap \mathcal{F}$ olur, ve $[0, 1]$ tıkızdır. Aynı şekilde her $[a, b]$ aralığı da tıkızdır.

2 Çarpımlar

Bir I göstergeç kümesinin her i elemanı için X_i, bir topolojik uzay olsun. Bu X_i uzaylarının **Descartes çarpımı,**[1] öyle bir kümedir ki elemanları, $(x_i \colon i \in I)$ biçimindedir, ve her i için $x_i \in X_i$ olur. Bu çarpım

$$\prod_{i \in I} X_i$$

olarak yazılır. Örneğin $I = \{0, \ldots, n-1\}$ ise ve $X_i = \mathbb{R}$ ise $\prod_{i \in I} X_i = \mathbb{R}^n$ olur.

[1]Veya *Kartezyen çarpım.*

Genelde $\prod_{i \in I} X_i = X$ olsun. X'in bir $(x_i \colon i \in I)$ elemanı, x olarak da yazılabilir. I'nın her i elemanı için, X'ten X_i'ye giden öyle bir π_i fonksiyonu vardır ki

$$\pi_i(x) = x_i$$

olur. Bu π_i fonksiyonları, *izdüşüm fonksiyonlarıdır.* X üzerinde, π_i fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topoloji, **çarpım topolojisidir.**

X, bu topolojiyle donatılmış olsun. $\{i(1), \dots, i(n)\} \subseteq I$ ise, ve her k için U_k, $X_{i(k)}$'nın açık altkümesiyse,

$$\{x \in X \colon x_{i(1)} \in U_1 \wedge \dots \wedge x_{i(n)} \in U_n\}$$

kümesi, X'in açık bir altkümesidir. Ayrıca bu kümeler, çarpım topolojisinin bir tabanını oluşturur.

Her i için U_i, X_i'nin açık altkümesiyse

$$\{x \in X \colon \bigwedge_{i \in I} x_i \in U_i\}$$

(yani $\bigcap_{i \in I} {\pi_i}^{-1}[U_i]$) açık olmayabilir; ama $\{x \in X \colon \bigwedge_{i \in I} x \notin U_I\}$ kapalıdır.

Tihonov teoremine göre, her X_i tıkız ise, X de tıkızdır. Bu teoremi kanıtlayacağız.

3 Sonlu durum

İlk olarak X ile Y tıkız ise $X \times Y$ çarpımının tıkız olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{U}$, çarpımın açık örtüsü olsun. $\mathcal{U}$'nun her W elemanı açık olduğundan X'in açık U_i altkümeleri vardır, ve Y'nin açık V_i altkümeleri vardır, öyle ki

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$$

olur. O zaman $\mathcal{U}$'daki W'nin yerine $U_i \times V_i$ kümelerini koyabiliriz. Yani $\mathcal{U}$'nun $\{U_i \times V_i \colon i \in I\}$ biçiminde olduğunu varsayabiliriz.

Şimdi $x \in X$ ise

$$I_x = \{i \in I \colon x \in U_i\}$$

olsun. O zaman $\{U_i \times V_i : i \in I_x\}$, $\{x\} \times Y$ çarpımının açık örtüsüdür. Ama bu çarpım tıkızdır, çünkü bu çarpım, $y \mapsto (x, y)$ fonksiyonu altında Y'nin imgesidir, ve bu fonksiyon süreklidir (neden?). O zaman I_x'in *sonlu* bir J_x altkümesi için

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$$

olur. Şimdi

$$U^x = \bigcap_{i \in J_x} U_i$$

olsun. Bu küme açıktır ve x elemanını içerir. O zaman $\{U^x : x \in X\}$ ailesi, X'in bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla X'in sonlu bir X_0 altkümesi için

$$X = \bigcup_{x \in X_0} U^x$$

olur. Ayrıca

$$U^x \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$$

olur. Dolayısıyla

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X_0} U^x \times Y = \bigcup_{x \in X_0} (U^x \times Y) \subseteq \bigcup_{x \in X_0} \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$$

olur. Öyleyse $\{U_i \times V_i : i \in \bigcup_{x \in X_0} J_x\}$, $\mathcal{U}$'nun *sonlu* altörtüsüdür. Sonuç olarak $X \times Y$ tıkızdır.

Tümevarımdan I sonluysa $\prod_{i \in I} X_i$ tıkızdır. Özel olarak $\mathbb{R}^n$'nin her

$$[a_0, b_0] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

altkümesi tıkızdır.

4 Kuvvet kümeleri

Şimdi 2, iki elemanlı $\{0, 1\}$ kümesi olsun; topolojisi, ayrık topoloji olsun. O zaman 2 tıkızdır. $\prod_{i \in I} 2$ çarpımı,

$$2^I$$

kuvveti olarak yazılır. Bu uzaydan $\mathscr{P}(I)$ kuvvet kümesine giden

$$(x_i : i \in I) \mapsto \{i \in I : x_n = 1\}$$

eşlemesi vardır.

2'nin her altkümesi açık olduğundan, I'nın her sonlu I_0 altkümesi için $e \in 2^{I_0}$ ise

$$\{x \in 2^I : (x_i : i \in I_0) = e)\}$$

açıktır. O zaman $A \subseteq 2^{I_0}$ ise

$$\{x \in 2^I : (x_i : i \in I_0) \in A)\}$$

kümesi de açıktır. Bu kümeye U_A densin. O zaman bu U_A kümeleri, 2^I kuvvetinin topolojisinin bir tabanını oluşturur. Ayrıca

$$(U_A)^{\mathrm{c}} = U_{A^{\mathrm{c}}}$$

olur, dolayısıyla U_A hem açıktır hem kapalıdır.

5 Önermeler mantığı

$\{P_i : i \in I\}$, *önerme değişkenleri* kümesi olsun, ve F, değişkenleri bu kümede olan bir önerme formülü olsun. O zaman F'nin değişkenleri, *sonlu* bir $\{P_i : i \in I_0\}$ kümesindedir.

2'nin elemanlarını, *doğruluk değeri* olarak düşünebiliriz:

$$1 = \text{doğru}, \qquad\qquad 0 = \text{yanlış}.$$

O zaman 2^I çarpımının her $(x_i : i \in I)$ elemanı, bir **doğruluk göndermesini** tanımlar. $I_0 = \{i(0), \dots, i(n-1)\}$ ise F'nin aşağıdaki gibi **doğruluk tablosu** vardır.

$P_{i(0)}$	$\dots$	$P_{i(n-1)}$	F
0	$\dots$	0	f^0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$e^j_{i(0)}$	$\dots$	$e^j_{i(n-1)}$	f^j
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	$\dots$	1	$f^{2^{n-1}}$

Şimdi

$$A = \{(e^j_{i(0)}, \dots, e^j_{i(n-1)})\colon f^j = 1\}$$

olsun. O zaman U_A'nın elemanları, F'nin **modelleridir.**

Ters olarak I'nın her sonlu I_0 altkümesi için, 2^{I_0} kuvvetinin her A altkümesi için, öyle bir F önerme formülü vardır ki U_A, F'nin modelleri kümesidir.

Şimdi $\mathcal{F}$, önerme formüllerinin bir kümesi olsun. Eğer e, $\mathcal{F}$'nin her elemanının modeliyse, o zaman e, $\mathcal{F}$'nin modelidir. Tihonov Teoremine göre, $\mathcal{F}$'nin her sonlu altkümesinin modeli varsa, $\mathcal{F}$'nin modeli vardır. Bu sonuç, **önermeler mantığı için tıkızlık teoremidir.**

6 Kuvvet kümelerinin tıkızlığı

Şimdi 2^ω kuvvetinin tıkızlığını kanıtlayacağız. $\{A(i)\colon i \in I\}$, öyle bir küme olsun ki I'nın her i elemanı için ω'nın sonlu bir J altkümesi için $A(i) \subseteq 2^J$ olsun. Ayrıca $\{U_{A(i)}\colon i \in I\}$ kümesinin sonlu kesişim özelliği olsun.

ω'nın her n elemanı, $\{0, \dots, n-1\}$ veya $\{k\colon k < n\}$ olarak düşünülebilir. $(a_k\colon k < n) \in 2^n$ olsun. Mümkünse I'nın her sonlu I_0 altkümesi için $\bigcap_{i \in I_0} U_{A(i)}$ kesişiminin öyle $(x_k\colon k \in \omega)$ elemanı olsun ki

$$(x_k\colon k < n) = (a_k\colon k < n)$$

sağlansın. ($n = 0$ ise elbette doğrudur.) Eğer her I_0 için $\bigcap_{i \in I_0} U_{A(i)}$ kesişiminin

$$(x_k\colon k < n) = (a_k\colon k < n), \qquad\qquad x_n = 0$$

eşitliklerini sağlayan $(x_k\colon k \in \omega)$ elemanı varsa, $a_n = 0$ olsun. Değilse $a_n = 1$ olsun. O zaman her I_0 için $\bigcap_{i \in I_0} U_{A(i)}$ kesişiminin

$$(x_k\colon k < n+1) = (a_k\colon k < n+1)$$

eşitliğini sağlayan $(x_k\colon k \in \omega)$ elemanı vardır.

Recursion kullanarak 2^ω uzayının öyle $(a_k\colon k\in\omega)$ elemanı vardır ki ω'nın her n elemanı için I'nın her sonlu I_0 altkümesi için $\bigcap_{i\in I_0} U_{A(i)}$ kesişiminin

$$(x_k\colon k<n)=(a_k\colon k<n)$$

eşitliğini sağlayan $(x_k\colon k\in\omega)$ elemanı vardır. Ama I'nın her sonlu I_0 altkümesi için, ω'nın öyle bir n elemanı vardır, ve 2^n çarpımının öyle A altkümesi vardır ki

$$\bigcap_{i\in I_0} U_{A(i)}=U_A=\{(x_k\colon k\in\omega)\colon (x_k\colon k<n)\in A\}.$$

O halde $(a_k\colon k\in\omega)\in U_A$.

7 Genel sayılabilen durum

Şimdi $X=\prod_{k\in\omega} X_k$ olsun, her X_i tıkız olsun, ve $\mathcal{F}$, sonlu kesişim özelliği olan, X'in kapalı altkümelerin bir ailesi olsun. π_n yerine $\pi_{\{n\}}$ yazalım, çünkü şimdi π_n, X'ten $\prod_{k<n} X_k$ çarpımına giden

$$(x_k\colon k\in\omega)\mapsto(x_k\colon k<n)$$

fonksiyonu olacak. F kapalıysa $\pi_n[F]$ de kapalıdır. (Neden?)

$$\{\pi_n[\bigcap\mathcal{F}_0]\colon \mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}\text{ ve sonlu}\}$$

ailesinin sonlu kesişim özelliği vardır (neden?). Bu ailenin kesişimi L_n olsun; bu küme boş değildir, çünkü $\prod_{k<n} X_k$ tıkızdır.

Şimdi $\pi_n^{n+\ell}$, $\prod_{k<n+\ell} X_k$ çarpımından $\prod_{k<n} X_k$ çarpımına giden

$$(x_k\colon k<n+\ell)\mapsto(x_k\colon k<n)$$

fonksiyonu olsun. O zaman

$$L_n\supseteq\pi_n^{n+1}[L_{n+1}]\supseteq\pi_n^{n+2}[L_{n+2}]\supseteq\cdots$$

çünkü $\pi_n=\pi_n^{n+1}\circ\pi_{n+1}$ ve genelde $\bigcap_{i\in I} f[A_i]\supseteq f[\bigcap_{i\in I} A_i]$. Ama

$$\{\pi_n^{n+k}[L_{n+k}]\colon k\in\omega\}$$

ailesinin sonlu kesişimin özelliği vardır, ve elemanları kapalıdır. Bu ailenin kesişimi K_n olsun; bu küme boş değildir. Ayrıca

$$K_n \supseteq \pi_n^{n+1}[K_{n+1}]$$

çünkü

$$\begin{gathered} L_{n+1} \supseteq \pi_{n+1}^{n+2}[L_{n+2}] \supseteq \pi_{n+1}^{n+3}[L_{n+3}] \supseteq \cdots \supseteq K_{n+1} \\ \pi_n^{n+1}[L_{n+1}] \supseteq \pi_n^{n+2}[L_{n+2}] \supseteq \pi_n^{n+3}[L_{n+3}] \supseteq \cdots \supseteq \pi_n^{n+1}[K_{n+1}] \end{gathered}$$

ama $K_n = \inf\{\pi_n^{n+k}[L_{n+k}] \colon k \in \omega\}$.

Şimdi X'in öyle a elemanı vardır ki her n için

$$\pi_n(a) \in K_n$$

olur. Ama $\mathcal{F}$'nin her F elemanı için, ω'nın öyle bir n elemanının olduğunu varsayabiliriz ki

$$x \in F \wedge \pi_n(y) = \pi_n(x) \implies y \in F$$

gerektirmesini varsayabiliriz. O halde

$$a \in \bigcap \mathcal{F}$$

olur.

8 Genel durum

Sonluaşırı tümevarım *(Transfinite induction)* ile, Tihonov Teoremi genelde doğrudur.