Analiz kısa sınavı 7

David Pierce, MSGSÜ

16 Nisan 2012

Soru 1. *Her topolojik uzayda, iki kümenin bileşiminin kapanışı, o kümelerin kapanışlarının bileşimine eşit midir?*

Çözüm. Evet. $\overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y}$ ve $\overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$, dolayısıyla

$$\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}.$$

Ayrıca $a \in \overline{X \cup Y} \smallsetminus \overline{X}$ olsun. O zaman a'nın bir V komşuluğu için $V \cap X = \varnothing$, ama a'nın her U komşuluğu için $U \cap (X \cup Y) \neq \varnothing$. O halde $(U \cap V) \cap Y \neq \varnothing$ (çünkü $U \cap V$, a'nın bir komşuluğudur). Özel olarak $U \cap Y \neq \varnothing$. Öyleyse $a \in \overline{Y}$.

Soru 2. *M bir küme, ve $f\colon M \times M \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer M'nin her a, b, ve c elemanları*

$$\begin{gathered} f(a,b) = 0 \iff a = b, \\ f(a,b) \leqslant f(a,c) + f(b,c) \end{gathered}$$

koşullarını sağlarsa f, M üzerinde bir metrik midir?

Çözüm. Evet: $c = a$ ise $f(a,b) \leqslant f(a,a) + f(b,a)$, yani $f(a,b) \leqslant f(b,a)$. Aynı şekilde $f(b,a) \leqslant f(a,b)$. Sonuç olarak $f(a,b) = f(b,a)$. Ayrıca $b = a$ ise

$$f(a,a) \leqslant f(a,c) + f(a,c),$$

yani $0 \leqslant 2f(a,c)$, dolayısıyla $0 \leqslant f(a,c)$.