

# Analiz kısa sınavı 6 ve çözümleri

David Pierce, MSGSÜ

9 Nisan 2012

**Soru 1.** Her Hausdorff topolojik uzayda, her tek noktalı kümenin kapalı olduğunu gösterin.

**Çözüm.**  $(X, \tau)$ , Hausdorff topolojik bir uzay olsun, ve  $a \in X$  olsun.  $(X, \tau)$  Hausdorff olduğundan  $X \setminus \{a\}$  kümesinin her  $b$  elemanı için öyle  $a$ 'nın  $U$  ve  $b$ 'nin  $V$  komşulukları vardır ki

$$U \cap V = \emptyset.$$

O zaman  $V \subseteq X \setminus \{a\}$ . Öyleyse  $X \setminus \{a\}$ ,  $b$ 'nin komşuluğudur. Dolayısıyla  $X \setminus \{a\}$  açıktır, ve  $\{a\}$ , kapalıdır.

**Soru 2.** Sonsuz bir topolojik uzayda, her tek noktalı küme kapalıysa, bu uzay Hausdorff olmalı mı?

**Çözüm.** Hayır, olmayabilir. Uzayın topolojisi Fréchet topolojisiyse, her iki açık kümenin kesişimi boş değildir. Aslında uzay  $X$  olsun, ve  $U$  ile  $V$ ,  $X$ 'in açık altkümeleri olsun. O zaman

$$U \cap V = X \setminus ((X \setminus U) \cup (X \setminus V)),$$

ve bu küme boş değildir, çünkü  $(X \setminus U) \cup (X \setminus V)$  sonlu, ve  $X$  sonsuzdur.