Analiz kısa sınavı 4

David Pierce, MSGSÜ

12 Mart 2012

Soru 1. $\{U \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \colon |U| > \omega\}$ kümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji midir? ($|U| > \omega$ demek, U sayılamaz demektir.)

Çözüm. $\varnothing$ sayılabilir olduğu için verilen küme topoloji değildir.

Uyarı.

- $\{U \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \colon |U| > \omega\} \cup \{\varnothing\}$ kümesi bir topoloji midir? Hayır, çünkü $(-\infty, 0]$ ile $[0, \infty)$ sayılamaz, ama kesişimi sayılabilir ve boş değildir.
- ω harfi w değil, *omega*dır. ω veya $\aleph_0$, ilk sonsuz kardinalitedir.

Soru 2. $f \colon X \to Y$ olsun; τ_Y, Y üzerinde bir topoloji olsun; ve

$$\tau_X = \{f^{-1}(V) \colon V \in \tau_Y\}$$

olsun. Bildiğimiz gibi τ_X, X üzerinde bir topolojidir. Eğer $(x_n \colon n \in \omega)$, X kümesinin bir dizisiyse, $x \in X$ ise, ve $f(x)$, $(f(x_n) \colon n \in \omega)$ dizisinin bir limitiyse, x noktası, $(x_n)_n$ dizisinin bir limiti midir?

Çözüm. Evet, x, $(x_n)_n$ dizisinin limitidir. Nitekim U, x noktasının açık bir komşuluğu olsun. O zaman τ_Y kümesinin bir V elemanı için $U = f^{-1}[V]$. $x \in U$ olduğundan $f(x) \in V$. Öyleyse V, $f(x)$ noktasının açık komşuluğudur. $f(x)$, $(f(x_n))_n$ dizisinin limiti olduğundan

$$n \geqslant M \implies f(x_n) \in V$$

koşulunu sağlayan bir M vardır. Ayrıca

$$f(x_n) \in V \implies x_n \in f^{-1}[V].$$

Öyleyse

$$n \geqslant M \implies x_n \in U.$$

Dolayısıyla x, $(x_n)_n$ dizisinin limitidir.

Uyarı. Limit tanımı kusursuz bir biçimde bilinmeli. (S, σ), bir topolojik uzay olsun, ve bu uzayda a, $(a_n \colon n \in \omega)$ dizisinin bir limiti olsun. Mantıksal simgelerle:

$$\forall U\ \exists M\ \forall n\ (U \in \sigma \land M \in \omega \land n \in \omega \land n \geqslant M \Rightarrow a_n \in U)$$

veya

$$(\forall U \in \sigma)(\exists M \in \omega)(\forall n \in \omega)(n \geqslant M \Rightarrow a_n \in U)$$

veya sadece

$$(\forall U \in \sigma)\ \exists M\ \forall n\ (n \geqslant M \Rightarrow a_n \in U)$$

(ω simgesinin yerine $\mathbb{N}$ kullanılabilir.) Türkçede:

σ kümesinin her U elemanı için
öyle bir M doğal sayısı vardır ki
her n doğal sayısı için
$n \geqslant M$ ise $a_n \in U$

veya

S uzayının her U açık altkümesi için
"her n için, $n \geqslant M$ ise $a_n \in U$"
koşulunu sağlayan bir M vardır.

İngilizcede:

For all U in σ
there is (a natural number) M such that
for all (natural numbers n),
if $n \geqslant M$, then $a_n \in U$.