Analiz kısa sınavı 3 *ile çözümleri*

David Pierce, MSGSÜ

5 Mart 2012

Soru. f, X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyon olsun; τ_X, X üzerinde bir topoloji olsun; ve τ_Y, Y üzerinde bir topoloji olsun.

1. Aşağıdaki harfli önermelerden ikisi doğrudur; hangileri?
2. Onları kanıtlayın.

A. $\{V \in \mathscr{P}(Y)\colon f^{-1}[V] \in \tau_X\}$, Y üzerinde bir topolojidir.
B. $\{f[U]\colon U \in \tau_X\}$, Y üzerinde bir topolojidir.
C. $\{U \in \mathscr{P}(X)\colon f[U] \in \tau_Y\}$, X üzerinde bir topolojidir.
D. $\{f^{-1}[V]\colon V \in \tau_Y\}$, X üzerinde bir topolojidir.

Çözüm. A ile D, doğrudur. Aşağıdaki eşitlikleri kullanacağız:

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset, \qquad f^{-1}[Y] = X, \qquad f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V], \qquad f^{-1}[\bigcup_{i\in I} U_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[U_i].$$

$\tau'_Y = \{V \in \mathscr{P}(Y)\colon f^{-1}[V] \in \tau_X\}$ olsun.

- $\emptyset \in \tau'_Y$ çünkü $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ ve $\emptyset \in \tau_X$ (çünkü τ_X bir topolojidir).
- $Y \in \tau'_Y$ çünkü $f^{-1}[Y] = X$ ve $X \in \tau_X$ (çünkü τ_X bir topolojidir).
- $U, V \in \tau'_Y$ ise $U \cap V \in \tau'_Y$ çünkü $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$ ve $f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V] \in \tau_X$ (çünkü $f^{-1}[U], f^{-1}[V] \in \tau_X$ ve τ_X bir topolojidir).
- Bir I göstergeç kümesindeki her i için $V_i \in \tau'_Y$ ise $\bigcup_{i\in I} V_i \in \tau'_X$ çünkü $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} V_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[V_i]$ ve $\bigcup_{i\in I} f^{-1}[V_i] \in \tau_X$ (çünkü $f^{-1}[V_i] \in \tau_X$ ve τ_X bir topolojidir).

Öyleyse τ'_X, X üzerinde bir topolojidir.

Şimdi $\tau'_X = \{f^{-1}[V]\colon V \in \tau_Y\}$ olsun.

- $\emptyset \in \tau'_X$ çünkü $\emptyset = f^{-1}[\emptyset]$ ve $\emptyset \in \tau_Y$.
- $X \in \tau'_X$ çünkü $X = f^{-1}[Y]$ ve $Y \in \tau_Y$.
- $U, V \in \tau'_X$ ise $U \cap V \in \tau'_X$ çünkü τ_Y kümesinin bir U' ile V' elemanları için $U = f^{-1}[U']$ ve $V = f^{-1}[V']$, dolayısıyla $U \cap V = f^{-1}[U' \cap V']$ ve $U' \cap V' \in \tau_Y$ (çünkü τ_Y bir topolojidir).
- Bir I göstergeç kümesindeki her i için $V_i \in \tau'_X$ ise $\bigcup_{i\in I} V_i \in \tau'_X$ çünkü her i için τ_Y kümesinin bir U_i elemanı için $V_i = f^{-1}[U_i]$, dolayısıyla $\bigcup_{i\in I} V_i = f^{-1}[\bigcup_{i\in I} U_i]$ ve $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_Y$ (çünkü τ_Y bir topolojidir).

Uyarı.

- τ'_Y, τ_Y topolojisinden farklı olabilir; τ'_X, τ_X topolojisinden farklı olabilir.
- $f^{-1}[V] \in \tau'_X$ ise $V \notin \tau_Y$ olabilir.
- $f[\emptyset] = \emptyset$, ve $f[\bigcup_{i\in I} V_i] = \bigcup_{i\in I} f[V_i]$, ama $f[X]$, Y kümesinin özalt kümesi olabilir, ve $f[U \cap V]$, $f[U] \cap f[V]$ kesişiminin özalt kümesi olabilir. (Dolayısıyla B ile C yanlıştır.)