Analiz son sınavı

David Pierce, MSGSÜ

30 Mayıs 2012

Bu sınavda $\mathbb{R}$'nin topolojisi, Öklid topolojisidir.

Soru 1. $\mathbb{R}$'nin topolojisinin *sayılabilen* tabanı var mıdır?

Soru 2. $2 = \{0, 1\}$ olsun, ve topolojisi, ayrık topoloji olsun. O zaman 2^ω, ω'dan 2'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun, ve topolojisi, çarpım topolojisi olsun. (Yani $n_0 < \cdots < n_m$ ve $e_k \in 2$ ise

$$\{f \in 2^\omega \colon f(n_0) = e_0 \wedge \cdots \wedge f(n_m) = e_m\}$$

temel açık bir küme olsun: öyle kümeler, topolojiyi üretir.) Bu uzayın sayılabilen sonsuz tıkız altkümesi var mıdır?

Soru 3. X, bir topolojik uzay olsun ve f, X'ten kendisine giden sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, x'e yakınsarsa, $(f(x_n) \colon n \in \mathbb{N})$ dizisinin $f(x)$ noktasına yakınsadığını gösterin.

Soru 4. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer 0'a yakınsayan her $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi için $(f(x_n) \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi 0'a yakınsarsa, f'nin 0'da sürekli olduğunu gösterin.

Soru 5. A, yoğun ve sayılamaz tamsıralı bir küme olsun. $\mathbb{R}$'deki gibi A'nın *aralıkları* vardır, ve A'nın *açık* aralıkları, bir topolojiyi üretir. $0 \in A$ olsun, ama 0, A'nın en büyük elemanı olmasın. Ayrıca $(0, \infty)$ aralığının her sayılabilen altkümesinin 0'dan büyük alt sınırı olsun. Hangi diziler b'ye yakınsar?

Bonus. Soru 3'ün tersi genelde yanlıştır. Yani Soru 4'te, $\mathbb{R}$'nin yerine başka bir uzay konulursa, soru yanlış olabilir. Bunu gösterin.