Analiz son sınavı, çözümleri

David Pierce, MSGSÜ

30 Mayıs 2012

Bu sınavda $\mathbb{R}$'nin topolojisi, Öklid topolojisidir.

Soru 1. *$\mathbb{R}$'nin topolojisinin* sayılabilen *tabanı var mıdır?*

Çözüm. Vardır. $\{(a,b)\colon a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$ aralıklar kümesi, bir tabandır. Neden? V, $\mathbb{R}$'nin açık bir altkümesi olsun. O zaman V'nin her c elemanı için öyle bir pozitif ε vardır ki

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq V$$

olur. Kesirli a ile b sayıları için $c-\varepsilon < a < c < b < c+\varepsilon$ olur. $(a,b) = I_c$ olsun. O zaman $c \in I_c$ ve $I_c \subseteq V$ olur. Öyleyse

$$V = \bigcup_{c \in V} I_c$$

olur.

Uyarı. $\{(a,b)\colon a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\} = \beta$ olsun. O zaman çözümümüzde V'den β'ya giden bir $c \mapsto I_c$ fonksiyonunu tanımladık. Dolaylı olarak Seçim Belitini kullandık. Bunu kullanmadan

$$V = \bigcup\{I \in \beta\colon I \subseteq V\}$$

diyebiliriz.

Soru 2. *$2 = \{0,1\}$ olsun, ve topolojisi, ayrık topoloji olsun. O zaman 2^ω, ω'dan 2'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun, ve topolojisi, çarpım topolojisi olsun. (Yani $n_0 < \cdots < n_m$ ve $e_k \in 2$ ise*

$$\{f \in 2^\omega\colon f(n_0) = e_0 \wedge \cdots \wedge f(n_m) = e_m\}$$

temel açık bir küme olsun: öyle kümeler, topolojiyi üretir.) Bu uzayın sayılabilen sonsuz tıkız altkümesi var mıdır?

Çözüm. Vardır. $a_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, 0, \dots)$ ve $b = (1, 1, \dots)$ olsun. O zaman $(a_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, b noktasına yakınsar. Dolayısıyla $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$ tıkızdır.

Uyarı. $a_n \to b$ çünkü b'nin her V komşuluğu için öyle bir M vardır ki 2^ω uzayının her $(x_n \colon n \in \omega)$ elemanı için, $(x_n \colon n \in \omega) = x$ ise

$$(x_0, \dots, x_M) = (1, \dots, 1) \implies x \in V$$

olur. Her topolojik uzayda, bir $(a_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, bir b noktasına yakınsarsa, $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$ tıkızdır, çünkü b'nin her U açık komşuluğu için $\{n \colon a_n \notin U\}$ sonludur. (Başka bir örnek, ara sınav 2'deydi.)

Soru 3. *X, bir topolojik uzay olsun ve f, X'ten kendisine giden sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, x'e yakınsarsa, $(f(x_n) \colon n \in \mathbb{N})$ dizisinin $f(x)$ noktasına yakınsadığını gösterin.*

Çözüm. V, $f(x)$ noktasının bir komşuluğu olsun. O zaman $f^{-1}[V]$, x noktasının bir komşuluğudur. $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, x'e yakınsadığından, öyle bir M vardır ki

$$n \geqslant M \implies x_n \in f^{-1}[V]$$

olur. Ayrıca

$$x_n \in f^{-1}[V] \implies f(x_n) \in V$$

olur. O zaman

$$n \geqslant M \implies f(x_n) \in V$$

olur. Öyleyse $(f(x_n) \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi, $f(x)$ noktasına yakınsar.

Soru 4. *$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer 0'a yakınsayan her $(x_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi için $(f(x_n) \colon n \in \mathbb{N})$ dizisi 0'a yakınsarsa, f'nin 0'da sürekli olduğunu gösterin.*

Çözüm. V, 0'ın bir komşuluğu olsun; $f^{-1}[V]$ önimgesinin 0'ın bir komşuluğu olduğunu göstermek istiyoruz. Komşuluk değilse, her n için $(-1/n, 1/n) \smallsetminus f^{-1}[V]$ boş değildir. Bu durumda

$$a_n \in \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) \smallsetminus f^{-1}[V]$$

olsun. O halde $(a_n \colon n \in \mathbb{N})$, 0'a yakınsar, ama her n için $f(x_n) \notin V$, dolayısıyla $(f(a_n) \colon n \in \mathbb{N})$, 0'a yakınsamaz.

Uyarı. $f^{-1}[V]$ önimgesinin 0'ın bir komşuluğu olduğunu nasıl doğrudan kanıtlanır bilmiyorum.

Soru 5. *A, yoğun ve sayılamaz tamsıralı bir küme olsun. $\mathbb{R}$'deki gibi A'nın* aralıkları *vardır, ve A'nın* açık *aralıkları, bir topolojiyi üretir. $0 \in A$ olsun, ama 0, A'nın en büyük elemanı olmasın. Ayrıca $(0, \infty)$ aralığının her sayılabilen altkümesinin 0'dan büyük alt sınırı olsun. Hangi diziler b'ye [*yani 0'a*] yakınsar?*

Çözüm. Her $(a_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi için, $\{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ kümesi sayılabildiğinden, bu kümenin 0'dan büyük b alt sınırı vardır. Ama $(-\infty, b)$ aralığı, 0'ın komşuluğudur. O zaman dizi 0'a yakınsarsa, bir M için

$$n \geqslant M \implies a_n \leqslant 0$$

olur. Zamanla sabitleşen diziler yakınsar; başka örnekleri bilmiyoruz.

Uyarı. Sınavdayken dediğim gibi son satırda b, 0 olmalı. Bu soruyu yazarken başka bir hata yapmışım. Soru $[0, \infty]$ *aralığında hangi diziler* 0*'a yakınsar?* olacaktı. O halde cevap, 0*'a zamanla sabitleşen diziler* olur.

Bonus. *Soru 3'ün tersi genelde yanlıştır. Yani Soru 4'te, $\mathbb{R}$'nin yerine başka bir uzay konulursa, soru yanlış olabilir. Bunu gösterin.*

Çözüm. Soru 5'teki gibi, öyle bir uzay vardır ki sadece zamanla sabitleşen diziler yakınsar. Başka bir örnek için, uzayın açık kümeleri, sadece tümleyenleri sayılabilen olan kümeler (veya $\varnothing$) olsun. (Uzayın kendisi, sayılamaz olmalı.) Bu uzayda $a \neq b$ olsun ve

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{eğer } x = a \text{ ise,} \\ b, & \text{eğer } x \neq a \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman f sürekli değil (çünkü a noktasının $\{b\}^{\mathrm{c}}$ komşuluğunun önimgesi, $\{a\}$ olur), ama $(x_n : n \in \mathbb{N})$, a'ya zamanla sabitleşirse $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$, b'ye sabitleşir.