Stone gösterim teoremleri [TASLAK]

David Pierce

25 Nisan 2012
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
Matematik Bölümü
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

1 Tanım. B, boş olmayan bir küme olsun, ve $+$ ile $\cdot$, B üzerinde 2-konumlu işlemler olsun. Eğer $(B,+,\cdot)$ yapısı

$$\begin{aligned} x+y&=y+x, & x(y+z)&=xy+xz,\\ x+(y+z)&=(x+y)+z, & (x+y)z&=xz+yz,\\ x(yz)&=(xy)z, & x^2&=x \end{aligned}$$

eşitliklerini ve

$$x+y=x+z\rightarrow y=z$$

gerektirmesini sağlarsa, o zaman $(B,+,\cdot)$ yapısına **Boole halkası** denir.

2 Örnek. ω, küme kuramcısının doğal sayılar kümesi olsun:

$$\omega=\{0,1,2,\dots\}.$$

$\mathscr{P}(\omega)$ kuvvet kümesi üzerinde

$$X\mathbin{\triangle}Y=(X\smallsetminus Y)\cup(Y\smallsetminus X)$$

olsun. O zaman $(\mathscr{P}(\omega), \vartriangle, \cap)$ yapısı, bir Boole halkasıdır. Burada

$$X \cup Y = X \vartriangle Y \vartriangle (X \cap Y), \qquad X \smallsetminus Y = X \vartriangle (X \cap Y).$$

Şimdi

$$P_\infty = \{X \subseteq \omega \colon X \text{ sonlu}\},$$
$$H = \{X \subseteq \omega \colon X \text{ sonlu} \lor \omega \smallsetminus X \text{ sonlu}\}$$

olsun. Bu kümeler, $\mathscr{P}(\omega)$ halkasının alt halkalarıdır, yani boş olmazlar ve $\vartriangle$ ile $\cap$ işlemleri altında kapalıdırlar.

3 **Uyarı.** Eğer B, $\mathscr{P}(\omega)$ halkasının alt halkasıysa, o zaman B, ω üzerinde bir topolojinin bir tabanıdır, çünkü B'nin her iki elemanının kesişimi zaten B'dedir.

4 **Örnek.** Önermeler mantığında, eğer F ile G formüllerinin doğruluk tabloları, birbirine aynıysa, F ile G birbirine eşit olarak sayılabilir, ve $F = G$ yazılabilir. Mesela

$$\neg(P \land Q) = (\neg P \lor \neg Q).$$

O zaman önerme formülleri kümesi üzerinde

$$(F, G) \mapsto \neg(F \leftrightarrow G), \qquad (F, G) \mapsto (F \land G)$$

işlemleri vardır, ve işlemler altında, formüller kümesi bir Boole halkasıdır.

5 **Örnek.** T, birinci basamak *teori* olsun [1], n bir doğal sayı olsun, ve T'nin imzasında φ ile ψ, n-konumlu formüller olsun [3]. Eğer T'nin her $\mathfrak{M}$ modelinde φ'nin yorumu $\varphi^{\mathfrak{M}}$ ve ψ'nin yorumu $\varphi^{\mathfrak{M}}$ birbirine eşit ise φ ile ψ, T'ye göre birbirine *denktir,* ve $\varphi \sim \psi$ ifadesini yazabiliriz. O halde $\varphi_0 \sim \varphi_1$ ve $\psi_0 \sim \psi$ ise

$$\varphi_0 \lor \psi_0 \sim \varphi_1 \lor \psi_1, \qquad \varphi_0 \land \psi_0 \sim \varphi_1 \land \psi_1, \qquad \neg\varphi_0 \sim \neg\varphi_1.$$

Şimdi $\mathrm{S}_n(T)$, n-konumlu formüllerin denklik sınıfları kümesi olsun. Önermeler mantığındaki gibi $\mathrm{S}_n(T)$, bir Boole halkasıdır.[1]

[1] Bu halkaya, T'nin bir **Lindenbaum halkası** denebilir. Kitaplarda *Lindenbaum cebir* terimi bulunur.

6 Teorem. *Her* $(B, +, \cdot)$ *Boole halkası*

$$xy = yx, \qquad\qquad 2x + y = y$$

eşitliklerini sağlar. Öyleyse $(B, +, \cdot)$ *değişmeli, karakteristiği* 2 *olan bir halkadır, ve özel olarak* $(B, +)$*, değişmeli bir gruptur.*

Kanıt. Bir Boole halkasında

$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y.$$

Dolayısıyla $x + y + z = xy + yx + x + y + z$, ve ondan sonra

$$z = xy + yx + z.$$

O zaman $2x + y = (2x + y)^2 = 4x^2 + 2xy + 2yx + y^2 = 4x + y$ ve bundan

$$y = 2x + y.$$

Son olarak $yx + z = 2xy + yx + z = xy + xy + yx + z = xy + z$ ve bundan

$$yx = xy. \qquad \square$$

7 Tanım. Bir Boole halkasının toplamaya göre birimi 0 olarak yazılır, yani $2x = 0$. Halkanın çarpmaya göre birimi varsa 1 olarak yazılır.

8 Örnek. (Numarası 2 olan örneğe bakın.) $\mathscr{P}(\omega)$ ve H Boole halkası birimlidir, ve bunlarda

$$0 = \varnothing, \qquad 1 = \omega, \qquad 1 + X = \omega \smallsetminus X.$$

Ama P_∞ birimli değildir.

9 Uyarı. Bir Boole halkasının her elemanının toplamaya göre tersi, kendisidir, yani $-x = x$.

10 Tanım. Bir Boole halkasında

- $x \leqslant y$ demek $xy = x$ demek olsun,
- $x \vee y = x + y + xy$ olsun; $(x, y) \mapsto x \vee y$ işlemi, **bitişmedir.**[2]

[2] İngilizcesi *joining.*

11 Örnek. $\mathscr{P}(\omega)$'da $X \leqslant Y$ demek $X \subseteq Y$ demektir, ve $X \vee Y$ elemanı $X \cup Y$'dir.

12 Örnek. Önermeler mantığında $F \leqslant G$ ancak ve ancak F, G formülünü gerektirir; ve $F \vee G$, formüllerin tikel-evetlemesidir.

13 Örnek. $\mathrm{S}_n(T)$'de $\varphi \leqslant \psi$ demek $T \vdash \forall \bar{x}\ (\varphi \to \psi)$ demektir.

14 Teorem. *Her Boole halkası, $\leqslant$ bağıntısı tarafından kısmi sıralanır. Ayrıca*

$$\begin{array}{ccc} x \leqslant x \vee y, & y \leqslant x \vee y, & x \leqslant z \wedge y \leqslant z \to x \vee y \leqslant z, \\ xy \leqslant x, & xy \leqslant y, & z \leqslant x \wedge z \leqslant y \to z \leqslant xy, \end{array}$$

ve $0 \leqslant x$, ve 1 varsa, $x \leqslant 1$.

Kanıt. Bağıntısının kısmi sıralamalar özelliği vardır:

1. $x \leqslant x$ çünkü $x^2 = x$.
2. $x \leqslant y$ ve $y \leqslant x$ ise $x = y$ çünkü bu durumda $xy = x$ ve $xy = yx = y$.
3. $x \leqslant y$ ve $y \leqslant z$ ise $x \leqslant z$ çünkü bu durumda $xz = xyz = xy = x$.

Kalan özellikler o kadar kolaydır. Mesela $x \leqslant x \vee y$ çünkü

$$x \cdot (x + y + xy) = x^2 + xy + x^2 y = x + 2xy = x. \qquad \square$$

15 Tanım. Birimli $(B, +, \cdot)$ Boole halkası, $+$, $\cdot$, ve $x \mapsto x + 1$ işlemleri altında bir **Boole cebiridir.** Çoğunlukla bir Boole cebirinde $\cdot$ işlemi $\wedge$ olarak yazılır, ve $x \mapsto x + 1$ işlemi, $x \mapsto \neg x$ olarak yazılır.

16 Uyarı. Bir Boole cebirinde

$$x + y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$$

eşitliği sağlanır. Öyleyse birimli Boole halkaları ve Boole cebirleri, birbiriyle aynı şeydir.

17 Tanım. Bir Boole halkasının bir altgrubu, halkanın elemanlarıyla çarpma altında kapalıysa, bu altgrup bir **idealdir.** Bir ideal, tüm halka değilse, **öz idealdir.** Bir I ideali,

$$xy \in I \text{ ise } x \in I \text{ veya } y \in I$$

gerektirmesini sağlarsa, **asal idealdir.** Bir öz ideal, daha büyük öz ideal tarafından kapsanmazsa, **maksimal idealdir.**

18 Teorem. *Bir Boole halkasının boş olmayan I altkümesi bir idealdir ancak ve ancak*

$$\begin{gathered} x \in I \text{ ve } y \in I \text{ ise } x + y \in I, \\ x \in I \text{ ve } y \leqslant x \text{ ise } y \in I. \end{gathered}$$

19 Teorem. *Bir Boole halkasının boş olmayan I altkümesi bir idealdir ancak ve ancak*

$$\begin{gathered} x \in I \text{ ve } y \in I \text{ ise } x \vee y \in I, \\ x \in I \text{ ve } y \leqslant x \text{ ise } y \in I. \end{gathered}$$

20 Teorem. *I, bir Boole halkasının bir ideali olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.*

1. *I maksimal.*
2. *I asal.*
3. *$xy = 0$ ise $x \in I \vee y \in I$.*

Kanıt. (1)⇒(2). I maksimal, $xy \in I$, ve $x \notin I$ olsun. O zaman

$$\{w\colon \exists z\ (z \in I \wedge w \leqslant x + z)\}$$

kümesi, tüm halka olmalı çünkü I'dan büyük bir idealdır. O zaman I'nın z elemanı vardır ki

$$y \leqslant x + z.$$

O halde $y = y^2 \leqslant y(x + z) = yx + yz$, ve bu, I'dadır.

(2)⇒(3). Apaçıktır çünkü her ideal, 0'ı içerir.

(3)⇒(1). J, I'dan büyük bir ideal olsun, ve $x \in J \smallsetminus I$ olsun. O zaman halkanın her y elemanı için

$$x(y + xy) = 0, \qquad\qquad y \leqslant x + y + xy.$$

Öyleyse $y + xy \in I$ ise $y \in J$. O zaman (3) doğru ise, J tüm halkadır, ve I maksimaldir. □

21 Tanım. B, bir Boole halkasıysa ve $A \subseteq B$ ise (A) veya $(A)_B$, B'nin A kümesini kapsayan en küçük idealidir. Ayrıca $b \in B$ ise $(b) = (\{b\})$.

22 Örnek. ω'nın her n elemanı için $(\omega \smallsetminus \{n\})_{P_\infty}$ ideali, P_∞ halkasının maksimal bir idealidir. Ayrıca bu halkanın her maksimal ideali, bu biçimindedir.

23 Örnek. P_∞, H halkasının maksimal bir idealidir. Şimdi $n \in \omega$ ise $P_n = (\omega \smallsetminus \{n\})_H$ olsun. O zaman P_n de, H halkasının maksimal bir idealidir. Bu halkanın her maksimal ideali, ya P_∞ ya da P_n biçimindedir.

24 Tanım. Her B Boole halkası için $\mathrm{S}(B)$, B'nin maksimal idealler kümesi olsun. B'nin her x elemanı için

$$[x] = \{P \in \mathrm{S}(B) \colon x \notin P\}$$

olsun.

25 Teorem. *Her B Boole halkası için $x \mapsto [x]$ göndermesi, B halkasından $\mathscr{P}(\mathrm{S}(B))$ halkasına giden bire bir homomorfizimdir. Ayrıca*

$$\bigcup_{x \in B} [x] = \mathrm{S}(B).$$

Kanıt. Ilk olarak $[x+y] = [x] + [y]$, yani B'nin her P maksimal ideal için

$$x + y \notin P \iff (x \in P \wedge y \notin P) \vee (x \notin P \wedge y \in P),$$

çünkü her $\{x, y, x+y\}$ üçlüsü için

- $xy(x+y) = 0$, o zaman üçlüden en az biri P'dedir;
- üçlüden her ikisinin toplamı, üçüncüdür;
- üçlüden ikisi P'deyse, toplamı da P'dedir.

Şimdi $[xy] = [x] \cap [y]$, yani her P için

$$xy \notin P \iff x \notin P \wedge y \notin P,$$

çünkü P asaldır. Öyleyse $x \mapsto [x]$ bir homomorfizimdir.

Şimdi $x \neq 0$ olsun. O zaman $[x]$ kümesinin boş olmadığını göstereceğiz. $I = \{y \colon xy = 0\}$ olsun. O zaman I, B'nin bir öz idealdir. Zorn'un Önsavına göre B'nin I'yı kapsayan bir P maksimal ideali vardır. O zaman

$P \in [x]$, yani $x \notin P$, çünkü $x \in P$ ise, her y için

$$\begin{gathered} xy \in P, \\ x \cdot (y + xy) = 0, \\ y + xy \in I, \\ y = y + xy + xy, \\ y \in P, \end{gathered}$$

yani $P = B$, ve bu, bir çelişki olurdu.

Son olarak $P \in \mathrm{S}(B)$ ise $B \smallsetminus P$'nin x elemanı vardır, ve $P \in [x]$. Öyleyse $\mathrm{S}(B) = \bigcup_{x \in B} [x]$. □

26 Sonuç. *Her B Boole halkası için $\mathrm{S}(B)$ kümesinin $[x]$ altkümeleri, bir topolojinin bir tabanını oluşturur.*

27 Tanım. Her B Boole halkası için $\mathrm{S}(B)$ üzerinde $\{[x] \colon x \in B\}$ tarafından üretilen topoloji, **Stone topolojisidir,** ve bu topolojiyle donatılmış $\mathrm{S}(B)$ topolojik uzayı, B'nin **Stone uzayıdır** [4].

28 Örnek. $\mathrm{S}(H) = \{P_n \colon n \in \omega\} \cup \{P_\infty\}$, ve $X \in P_\infty$ ise

$$[X] = \{P_n \colon n \in X\}, \qquad [\omega \smallsetminus X] = \{P_n \colon n \in \omega \smallsetminus X\} \cup \{P_\infty\}.$$

Özel olarak $\{P_n\} = [\{n\}]$, ama P_∞, H uzayının yığılma noktasıdır.

29 Tanım. Birimli Boole halkasının F altkümesi için, eğer $\{\neg x \colon x \in F\}$ bir ideal ise, o zaman F bir **filtredir.** İdeal maksimal ise, filtre bir **ultra filtredir.**

30 Uyarı. Bir Boole cebirinin boş olmayan F altkümesi bir filtre ancak ve ancak

$$\begin{gathered} x \in F \text{ ve } y \in F \text{ ise } x \wedge y \in F, \\ x \in F \text{ ve } x \leqslant y \text{ ise } y \in F. \end{gathered}$$

Bir F filtresi bir ultra filtredir ancak ve ancak cebirin her x için ya x ya da $\neg x$, F'de bulunur. Bazen bir Stone uzayının elemanları, ultra filtreler olarak düşünülür.

31 Örnek. Herhangi topolojik bir uzayda, bir elemanın komşulukları, bir filtre oluşturur.

32 Örnek. F, $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ kuvvet kümesinin bir ultra filtresi olsun. O zaman aşağıdaki önermelerden biri ve sadece biri doğrudur.

1. F'nin her sonlu altkümesinin kesişiminin üst sınırı yoktur.
2. F'nin her sonlu altkümesinin kesişiminin alt sınırı yoktur.
3. Tek bir α gerçel sayısı için
   - ya $\alpha \in \mathbb{Q}$ ve $\{\alpha\} \in F$, dolayısıyla $\bigcap F = \{\alpha\}$ olur,
   - ya da $\bigcap F = \varnothing$, ama α, F'nin her elemanının yığilma noktasıdır.

33 Teorem. *Her Boole halkasının Stone uzayı Hausdorfftur, ve her $[x]$ altkümesi, hem açık hem kapalıdır.*

Kanıt. P ile Q, uzayın değişik elemanları olsun. O zaman $P \smallsetminus Q$ ve $Q \smallsetminus P$ farkları boş olmaz. Elemanları sırasıyla x ve y olsun. O zaman

$$P \notin [x], \qquad Q \in [x], \qquad Q \notin [y], \qquad P \in [y].$$

Özel olarak $[x]$, Q'nin açik komşuluğudur, ve $[y]$, P'nin açık komşuluğudur. Fakat $[x] \cap [y]$ boş olmayabilir. Aslında $y + xy \in Q$ ve $y + xy \notin P$ (çünkü $xy \in P \cap Q$). Yani

$$Q \notin [y + xy], \qquad P \in [y + xy].$$

Ayrıca $x(y + xy) = 0$ dolayısıyla $[x] \cap [y + xy] = \varnothing$. Öyleyse $\mathrm{S}(B)$ uzayı Hausdorfftur.

Burada P'nin x'i içermesini kullanmadık. Öyleyse $x \notin Q$, $P \neq Q$, ve $y \in Q \smallsetminus P$ ise

$$P \in [y + xy], \qquad [y + xy] \subseteq [x]^{\mathrm{c}}.$$

O zaman $[x]^{\mathrm{c}}$, her noktasının komşuluğudur,[3] yani bu küme açıktır (ve kapalıdır), ve $[x]$ kümesi kapalıdır (ve açıktır). □

[3]Burada c, *complement* (yani 'tümleyen') içindir.

34 Uyarı. Hausdorff topolojik bir uzayın, elemanları kapalı da olan bir tabanı varsa, uzay *tamamen kopuktur,*[4] yani her iki değişik p ile q noktaları için, p'nin q'yü içermeyen hem açık hem kapalı komşuluğu vardır. Ters yanlış olabilir. Mesela sonsuz bir X uzayın topolojisi

$$\{V \in \mathscr{P}(X)\colon p, q \notin V\} \cup \{V \in \mathscr{P}(X)\colon X \smallsetminus V \text{ sonlu}\}$$

olsun. Bu topoloji tamamen kopuktur, ama p veya q'nün her komşuluğu, tümleyeni sonlu olan bir kümedir, dolayısıyla iki komşuluğun kesişimi boş değildir. Fakat her *tıkız* ve tamamen kopuk uzay Hausdorfftur, ve elemanları kapalı da olan bir tabanı vardır.

35 Teorem. *Her birimli Boole halkasının Stone uzayı tıkızdır.*

Kanıt. A, birimli Boole halkasının altkümesi olsun. A'nın her sonlu A_0 altkümesi için

$$\bigcap_{x \in A_0} [x]^{\mathrm{c}} \neq \varnothing$$

varsayılsın. O zaman halkanın A_0'yı kapsayan bir öz ideali vardır. Halka birimli olduğundan $\sum A_0 \neq 1$.[5] Bundan halkanın A'yı kapsan bir öz ideali vardır. Zorn'un Önsavına göre A'yı kapsan maksimal bir ideal vardır, yani

$$\bigcap_{x \in A} [x]^{\mathrm{c}} \neq \varnothing.$$

Öyleyse birimli Boole halkasının Stone uzayı tıkızdır. □

36 Örnek. $\mathrm{S}(P_\infty)$ tıkız değildir, çünkü $\bigcap_{k \in \omega} [\{k\}]^{\mathrm{c}} = \varnothing$, ama her n için $\bigcap_{k<n} [\{k\}]^{\mathrm{c}} \neq \varnothing$. Ama $\mathrm{S}(H)$ tıkızdır.

37 Örnek. Simdi $P_{(\infty,\infty)} = \{X \subseteq \omega \times \omega\colon X \text{ sonlu}\}$ olsun, ve H_2, $\mathscr{P}(\omega \times \omega)$ cebirinin en küçük alt cebiri ki

- $P_{(\infty,\infty)} \subseteq H_2$, ve
- ω'nın her n elemanı için $\{n\} \times \omega \in H_2$ ve $\omega \times \{n\} \in H_2$.

[4] İngilizcesi *totally disconnected* [2, sayfa 111, Alıştırma 9.9].
[5] Yani $A_0 = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ ise $x_0 + \dots + x_{n-1} \neq 0$.

O zaman $P_{(\infty,\infty)}$, H_2 halkasının bir maksimal idealidir, ve halkanın başka maksimal ideallerinin tanımları, aşağıdadır. $\omega\times\omega$'nın her (k,m) elemanı için

$$\begin{aligned} P_{(k,m)} &= \{X \in H_2 \colon (k,m) \notin X\}, \\ P_{(k,\infty)} &= \{X \in H_2 \colon X \cap \{k\} \times \omega \text{ sonlu}\}, \\ P_{(\infty,m)} &= \{X \in H_2 \colon X \cap \omega \times \{m\} \text{ sonlu}\}. \end{aligned}$$

O zaman[6]

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(H_2)' &= \mathrm{S}(H_2) \smallsetminus \{P_{(k,m)} \colon (k,m) \in \omega \times \omega\}, \\ \mathrm{S}(H_2)'' &= \{P_{(\infty,\infty)}\}. \end{aligned}$$

38 Tanım. Her T topolojik uzay için $\mathrm{B}(T)$, T'nin hem açık hem kapalı altkümeler kümesi olsun.

39 Teorem. *Her birimli B Boole halkası $x \mapsto [x]$ göndermesi altında $\mathrm{B}(\mathrm{S}(B))$ halkasına izomorftur.*

Kanıt. $\mathrm{B}(\mathrm{S}(B))$'nin $\mathscr{P}(\mathrm{S}(B))$'nin birimli Boole althalkası olduğu apaçıktır. Şimdi $F \in \mathrm{B}(\mathrm{S}(B))$ olsun. F'nin açık olduğundan B'nin bir A altkümesi için $F = \bigcup_{x\in A}[x]$. F kapalı olduğundan tıkızdır. O zaman A'nın sonlu bir $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ altkümesi için

$$F = [x_0] \cup \dots \cup [x_{n-1}] = [x_0 \vee \dots \vee x_{n-1}].$$

Öyleyse $x \mapsto [x]$ göndermesi $\mathrm{B}(\mathrm{S}(B))$ halkasını örtür. □

40 Tanım. Her T topolojik uzayı için, T'nin her p noktası için

$$[p] = \{F \in \mathrm{B}(T) \colon p \notin F\}$$

olsun.

41 Teorem. *T uzayı, tıkız ve tamamen kopuk olsun. O zaman*

- *T'nin her p noktası için, $[p] \in \mathrm{S}(\mathrm{B}(T))$;*
- *T, $p \mapsto [p]$ göndermesi altında $\mathrm{S}(\mathrm{B}(T))$ uzayına topolojik olarak denktir.*[7]

Kanıt. Alıştırma. □

---

[6] Bir T uzayının yığılma noktaları kümesi, T' olur.

[7] Yani homeomorfiktir [2, sayfa 83].

Kaynaklar

[1] Teo Grünberg and Adnan Onart, *Mantık terimleri sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[2] Ali Nesin, *Analiz IV*, Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2011.

[3] David Pierce, *Modeller kuramına giriş*, `http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Modeller-kurami/`, February 2012.

[4] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), no. 1, 37–111. MR MR1501865