Analitik Geometri

David Pierce
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
Matematik Bölümü
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce
polytropy.com

20 Şubat 2020 taslağı

İçindekiler

1 Giriş

Analitik Geometri, cebirsel yöntemleri kullanan geometridir. Bu yöntemler, bir *orantılar* kuramına bağlıdır. Bu kuramda

1) orantılılık bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır;
2) *Thales Teoremi* doğrudur.

Bu notlarda

- orantılılık kuramını, *Desargues Teoremi*'nden;
- Desargues Teoremi'ni, *Pappus Teoremi*'nden;
- Pappus Teoremi'ni, Öklid'in *Öğeler*'inin I. kitabından

elde edeceğiz.

Geometrik tanımlarından birine göre bir **elips,** iki verilen **odak noktasından** uzaklıklarının toplamı aynı olan noktaların bir yeridir. Analitik geometride, bir a ve bir b için, elipsi tanımlayan koşul iki değişkeni olan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cebirsel denklemi tarafından ifade edilebilir.

Cebirsel bir denklemde değişkenlerin ve sabitlerin değerleri, gerçel sayıların oluşturduğu $\mathbb{R}$ gibi bir *cisimden* gelir. Bir cisimde iki elemanın *toplamı* ve *çarpımı* vardır. Toplama ve çarpma işlemine geometrik bir tanımı vereceğiz.

2 Orantılar

2.1 Thales Teoremi

Öklid'in *Öğeler*'inin birinci kitabında toplamanın geometrik anlamı vardır, ama çarpma kavramı yoktur [8, 9, 10].

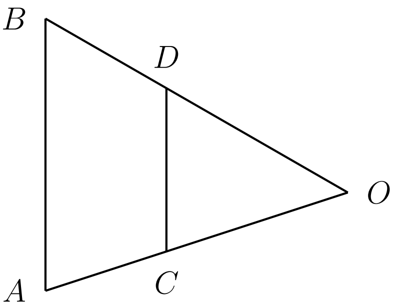
La Géometrie adlı kitabında Descartes, gerçel sayıların çarpmasına geometrik bir anlamı verir [6, 7]. Bunun için **Thales Teoremi'ni** kullanır [19]. Bu teoreme göre eğer Şekil 1'deki gibi bir OAB üçgeninin OA kenarında C ve OB kenarında D oturursa, o zaman

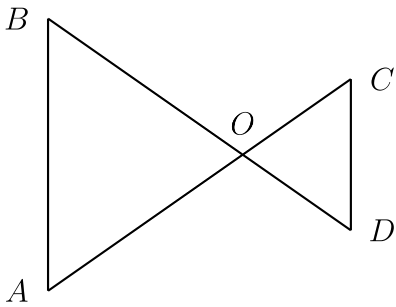
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OC} :: \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OD}.$$

Burada

- $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, ve $\overrightarrow{OD}$, **yönlü doğru parçasıdır**;
- $\overrightarrow{OA}$:$\overrightarrow{OC}$ ve $\overrightarrow{OB}$:$\overrightarrow{OD}$, sayfa 14'te tanımlayacağımız şekilde *orandır*;
- $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OC} :: \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OD}$, **orantıdır.**

İki farklı yönlü doğru parçası çizilebilir ve birbirine eşit olabilir. İki yönlü doğru parçasının oranı olabilir, ama soyut bir şey olduğundan bir oranın kendisi çizilemez. Bundan dolayı bir orantıya gore iki oran birbirine eşit değil, birbiriyle *aynıdır.* Bununla birlikte bir orantıda $::$ işaretinde $=$ işareti kullanılabilir.





Şekil 1: Thales Teoremi

Thales Teoremi, *Öğeler*'in altıncı kitabının ikinci önermesidir. Önermeyi göstermek için Öklid, beşinci kitapta bulunan orantılar kuramını kullanır. Bu kuram, uzunlukların **Arşimet özelliğini** varsayır. Bu özelliğe göre iki uzunluğun daha küçüğünün bir katı, daha büyüğünden daha büyüktür.

Pozitif gerçel sayıların da Arşimet özelliği vardır. Ayrıca iki pozitif gerçel sayının bölümü vardır, ve bu bölüm, pozitif gerçel bir sayıdır. Öklid'de iki uzunluğun oranı vardır, ve bu oran, pozitif gerçel bir sayı olarak anlaşılabilir.

Aslında analitik geometri yapmak için, Arşimet özelliğine ihtiyacımız yoktur. Ayrıca oranlar negatif olabilir. Orantıların *tanımı* olarak Thales Teoremi'ni varsayabiliriz. Bu durumda orantılılık bağıntısının geçişli olduğunu göstermek zorundayız. Bunun için, *Pappus Teoremi'ni* ve *Desargues Teoremi'ni* kullanacağız.

2.2 Analik geometride bazı tarihler

M.Ö. 585'te Thales'in önceden söylediği güneş tutulması [12, I.74], [11].

M.S. 4. yüzyılında Pappus Teoremi yayınlanır [17, 18].

1637'de Descartes'ın *La Géometrie*'si yayınlanır.

1640'ta Pascal, Pappus Teoremi'nin bir genelleştirmesini verir [3, 21].

1648'de Desargues Teoremi yayınlanır [5].

1899'da Hilbert, Pappus ve Desargues Teoremi'nin analitik geometri yapmak için yettiğini gösterir [14].

1905'te Hessenberg, Pappus Teoremi'nden Desargues Teoremi'ni kanıtlar [13]. Şimdi Hilbert, Hessenberg'in kanıtını kullanabilir [15]. İkisi, Pappus Teoremi'ne *Pascal Teoremi'ni* der.

1957'de Artin, Pappus ve Desargues Teoremi'nin analitik geometri için yettiğini Hilbert'inkinden (ve bizimkinden) başka bir şekilde gösterir [2].

2.3 Desargues Teoremi: Bildirme

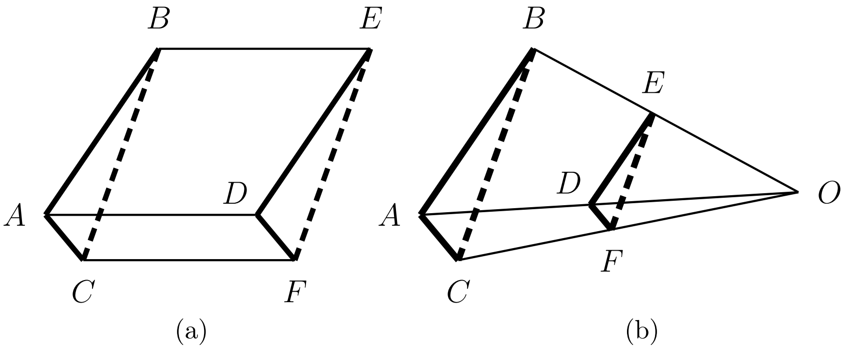
Üç tane AD, BE, ve CF doğrusu Şekil 2'deki gibi

(a) ya birbirine paralel olsun,

(b) ya da O noktasında kesişsin.

Ayrıca

$$AB \parallel DE, \qquad AC \parallel DF \tag{1}$$



Şekil 2: Desargues Teoremi

olsun. **Desargues Teoremi'ne** göre

$$BC \parallel EF.$$

Bu teoremin birinci, "parallel" durumunu elde etmek için, Öklid'in *Öğeler*'inin birinci kitabından Önermeler 34 ve 30, birinci ortak kavram, ve Önerme 33 yeter.

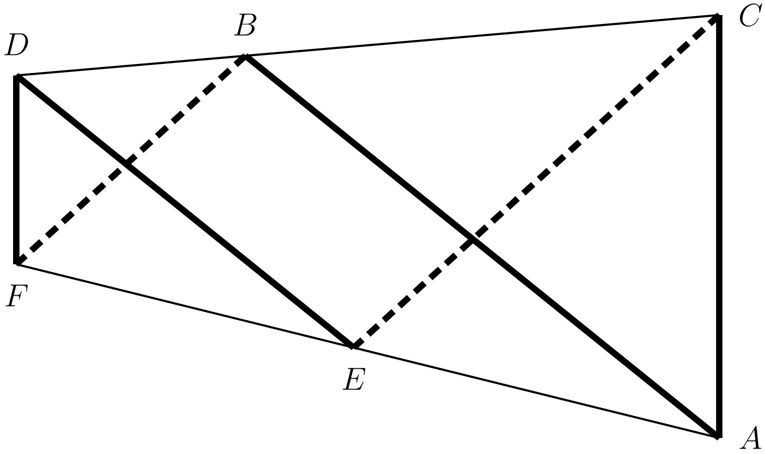
2.4 Pappus Teoremi: Bildirme ve Gösterme

Desargues Teoremi'nin ikinci durumunu göstermek için, Şekil 3 veya 4'teki gibi A noktası EF'de, D noktası BC'de olsun, ve tekrar (1)'deki gibi $AB \parallel DE$ ve $AC \parallel DF$ olsun. **Pappus Teoremi'ne** göre

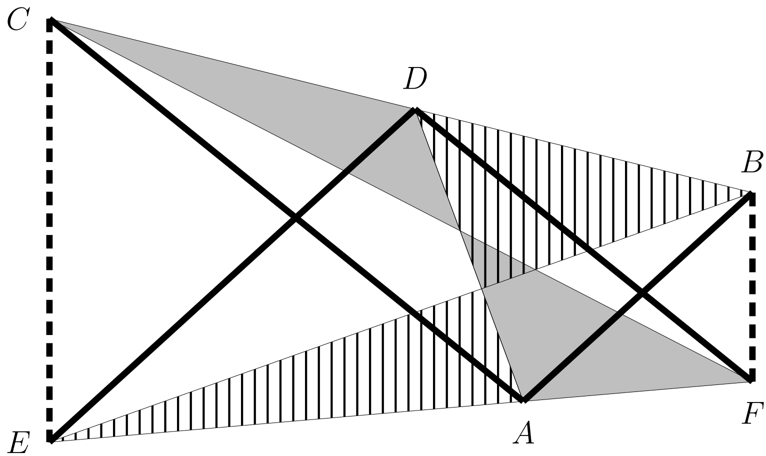
$$BF \parallel CE. \tag{2}$$

Bunu kanıtlamak için Şekil 4'teki gibi AD, BE, ve CF çizilsin. Öklid'in Önerme 37'sine göre $AB \parallel DE$ olduğundan

$$ABD = ABE.$$



Şekil 3: Pappus Teoremi



Şekil 4: Pappus Teoremi'nin düzenlemesi

İkinci ortak kavrama göre

$$FBDA = AFB + ABD = AFB + ABE = FBE. \tag{3}$$

Benzer şekilde $FD \parallel AC$ olduğundan

$$FDA = FDC,$$
$$FBDA = FBD + FDA = FBD + FDC = FBC. \tag{4}$$

Şimdi (3) ve (4)'ten

$$FBE = FBC.$$

Önerme 39'a göre (2)'deki gibi $BF \parallel CE$.

Pappus'un Teoremi'nde iki doğru ve bir altıgen vardır, ve

- altıgenın kenarlarından her biri doğruların birinden diğerine geçer,
- iki durumda altıgenin karşıt kenarları birbirine paraleldir.

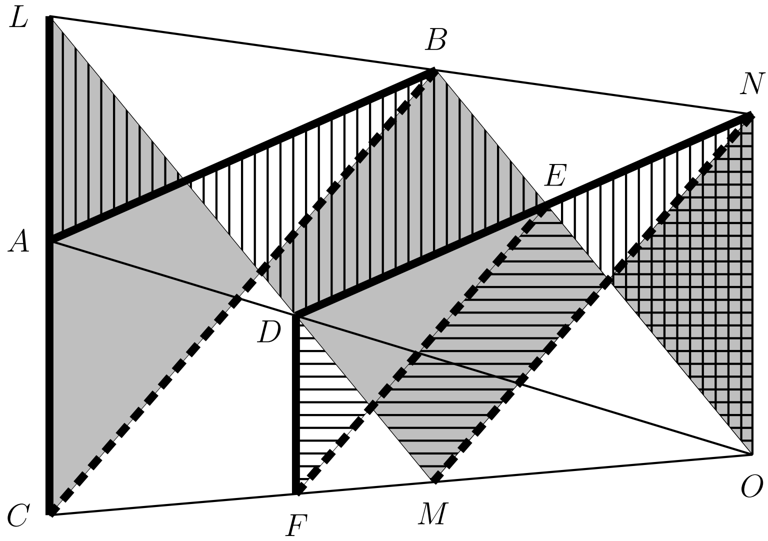
Sonuç olarak üçüncü durumda da karşıt kenerlar paralellerdir. Şekiller 3 ve 4'te altıgen $ABFDEC$ olur.

2.5 Desargues Teoremi: Gösterme

Şimdi AD, BE, ve CF'nin ortak noktası O olsun; ayrıca $AB \parallel DE$ ve $AC \parallel DF$ olsun. İki durum vardır.

(a) Eğer Şekil 5'teki gibi $BACO$ bir paralelkenar değilse, o zaman $OB \nparallel AC$ varsayılabilir. Bu durumda $LM \parallel OB$ ve $D \in LM$ olsun. Pappus Teoremi ile

- $ONDLAB$ altıgeninde $ON \parallel AL$,
- $ONMLCB$ altıgeninde $BC \parallel MN$,



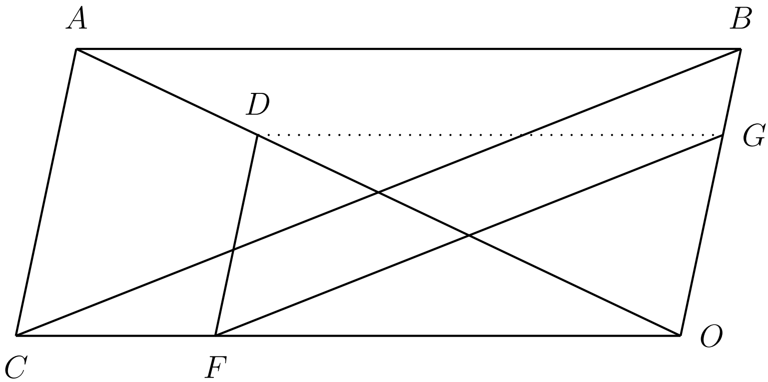
Şekil 5: Desargues için Hessenberg'in kanıtı

- $ONMDFE$ altıgeninde $EF \parallel MN$.

Paralellik geçişli olduğundan $BC \parallel EF$.

(b) Eğer Şekil 6'da gibi $BACO$ bir paralelkenar ise, o zaman $ABCO$ bir paralelkenar değildir. Bu durumda OB'de bir G için $FG \parallel CB$. İlk durumdan $DG \parallel AB$, dolayısıyla G ve E noktası aynıdır.

Desargues Teoremi'nin ikinci durumu kanıtlanmıştır.



Şekil 6: Hessenberg'in kanıtının 2. durumu

3 Vektörler ve oranları

3.1 Vektörler Grubu

Öklid'de doğru parçaların eşitliği bir denklik bağıntısıdır. Özellikle birinci ortak kavrama göre eşitlik geçişlidir. Eşitliğe göre bir doğru parçasının denklik sınıfı, onun **uzunluğu** olarak anlaşılabilir.

Eğer her doğru kendisine paralel ise, o zaman Önerme 30'a göre paralellik de bir denklik bağıntısıdır.

Desargues Teoremi'nin ilk durumu sayesinde yönlü doğru parçalarının, aşağıdaki koşulları sağlayan *eşitlik* bağıntısı vardır, ve bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

1. Herhangi $ABDC$ paralelkenari için
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

2. Herhangi $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ve C noktası için, bir ve tek bir D noktası için,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Eşitliğe göre yönlü bir doğru parçasının denklik sınıfı, bir **vektördür.**

Bir vektör daha vardır. $\overrightarrow{AA}$'nın yönlü doğru parçası olmadığı halde her durumda
$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$$

olsun, ve her $\overrightarrow{AA}$'nın temsil ettiği vektör,

$$\mathbf{0}$$

olsun. Ayrıca tanıma göre

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

olsun. Bu tanımlar, vektörlere geçer, ve herhangi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ve $\boldsymbol{c}$ vektörü için

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Böylece vektörler V kümesini oluşturduğunda $(V, +, -, \mathbf{0})$ bir **abelyan gruptur.**

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ olduğunda

$$A + \overrightarrow{CD} = B$$

olsun. $\overrightarrow{AB}$ bir $\boldsymbol{a}$ vektörünü temsil ettiğinde

$$A + \boldsymbol{a} = B$$

olsun. O zaman her durumda

$$A + (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (A+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

Bu şekilde vektörler grubu, düzlemi **etki eder.** Kısaca

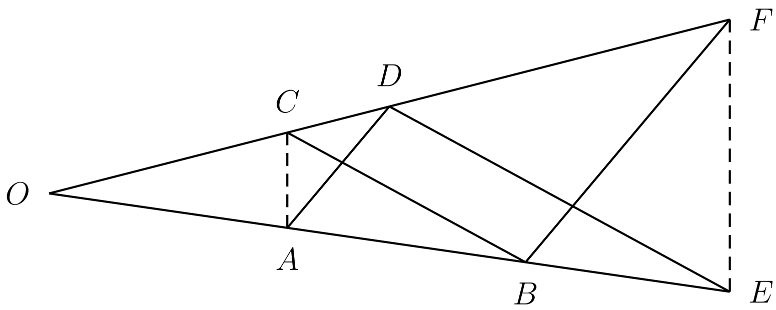
- iki vektörün toplamı vardır;
- bir nokta ve bir vektörün toplamı vardır;
- iki noktanın toplamı yoktur.

3.2 Oranlar Cismi

İki paralel yönlü doğru parçasının **oranı** vardır, ve ayrıca onların temsil ettiği vektörlerin aynı oranı vardır. Desargues Teoremi'nin ikinci durumu sayesinde bir oran, aşağıdaki koşullar sağlayan bir denklik sınıfı olarak tanımlanabilir.

1. Thales Teoremi doğrudur.
2. Herhangi $\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OB}$ oranı ve $\overrightarrow{OC}$ yönlü doğru parçası için, bir ve tek bir D noktası için,
$$\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OB}::\overrightarrow{OC}:\overrightarrow{OD}.$$

Burada eğer $\overrightarrow{OA}$ bir $\boldsymbol{a}$ vektörünü ve $\overrightarrow{OB}$ bir $\boldsymbol{b}$ vektörünü temsil ederse, o zaman $\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OB}$ oranı
$$\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}$$
olarak yazılabilir. Ayrıca $\mathbf{0}:\boldsymbol{a}$ oranı vardır. Her durumda bu oran aynıdır ve
$$0$$
olarak yazılabilir. Şimdi tanıma göre
$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}:\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}):\boldsymbol{c},\\ -\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}),\\ (\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}:\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{b}:\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b})^{-1},\\ \boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}=1\end{gathered}$$
olsun. Pappus Teoremi sayesinde
$$(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d})::(\boldsymbol{c}:\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}),$$



Şekil 7: Oranlar çarpmasının değişmeliliği

çünkü Şekil 7'de eğer

$$AD \parallel BF, \qquad BC \parallel ED$$

ise, o zaman Thales Teoremi'nden

$$\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{OD} : \overrightarrow{OF}, \qquad \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OE} :: \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD},$$

ve ayrıca Pappus Teoremi'nden

$$AC \parallel EF,$$

dolayısıyla

$$\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OE} :: \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OF},$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD}) &:: (\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OE}) \\ &:: \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OE} :: \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OF} :: (\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{OD} : \overrightarrow{OF}) \\ &:: (\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}).\end{aligned}$$

Böylece oranlar K kümesini oluşturduğunda

- $(K, +, -, 0)$ bir abelyan gruptur,
- $(K \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ bir abelyan gruptur,
- K'de herhangi a, b, ve c oranı için
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Bundan dolayı $(K, \cdot, +, -, 1, 0)$ bir **cisimdir.**

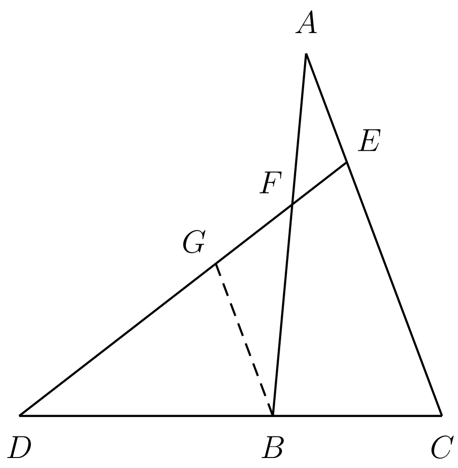
Örneğin
- kesirli sayır $\mathbb{Q}$,
- gerçel sayılar $\mathbb{R}$,

cismini oluşturur. Tamsayılar bir cismi oluşturmaz, ama her p asal sayısı için, p modülüne göre tamsayılar $\mathbb{F}_p$ cismi oluştur. Bu cisimde
$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0, \tag{5}$$
kısaca $p = 0$, olur. Bununla birlikte $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'de her p için (5) yanlıştır. Şekillerimizde oranlar cismi $\mathbb{R}$'dir. *Kullanacağımız her oranlar cisminde* $2 \neq 0$ *olur.* (Diğer durumda hiç doğru parçasının orta noktası yoktur; sayfa 21'deki Önerme 4'e bakın.)

3.3 Menelaus ve Ceva

Önerme 1 (Menelaus Teoremi [20, H69–70]). *Şekil 8'de*
$$(\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) \cdot (\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) = -1.$$

Kanıt. Thales'ten
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB} &:: \overrightarrow{AE} : \overrightarrow{GB} \\ &:: (\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{EC}) \cdot (\overrightarrow{EC} : \overrightarrow{GB}) \\ &:: (\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{EC}) \cdot (\overrightarrow{DC} : \overrightarrow{DB}).\end{aligned}$$
□



Şekil 8: Menelaus Teoremi

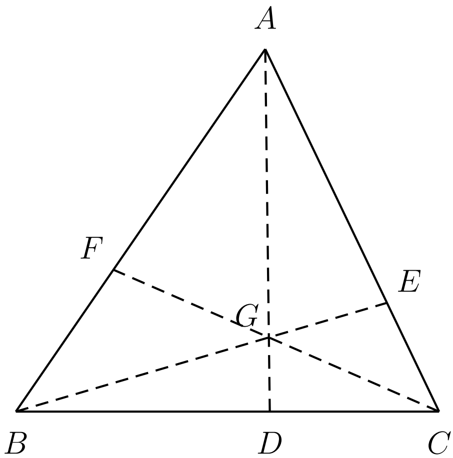
Önerme 2 (Ceva Teoremi)**.** *Şekil 9'da*

$$(\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) \cdot (\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) = 1.$$

Kanıt. Menelaus Teoremi'nden

$$-(\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) :: (\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{EG} : \overrightarrow{GB})$$
$$-(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) :: (\overrightarrow{BG} : \overrightarrow{GE}) \cdot (\overrightarrow{EA} : \overrightarrow{AC}).$$

□



Şekil 9: Ceva Teoremi

4 Koordinatlar

4.1 Noktalar

Eğer A noktası OB doğrusunda ise,

$$(\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$$

olsun. O zaman herhangi a ve b oranı ve herhangi $\boldsymbol{c}$ ve $\boldsymbol{d}$ vektörü için

$$\begin{aligned} a \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) &= a \cdot \boldsymbol{c} + a \cdot \boldsymbol{d}, \\ (a + b) \cdot \boldsymbol{c} &= a \cdot \boldsymbol{c} + b \cdot \boldsymbol{c}, \\ a \cdot (b \cdot \boldsymbol{c}) &= (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{c}, \\ 1 \cdot \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

Böylece vektörler grubu, oranlar cismi altında bir **vektör uzayıdır.** Ayrıca OAB bir üçgen olduğunda herhangi P noktası için, girdileri K'de olan bir ve tek bir (a, b) sıralı ikilisi

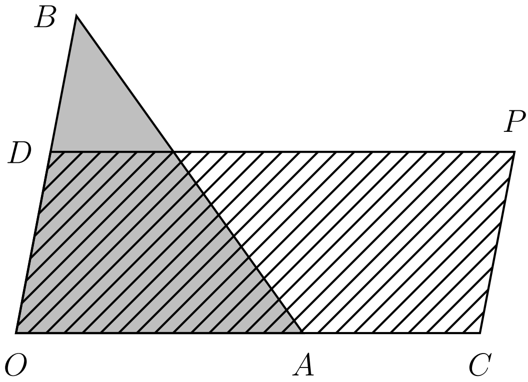
$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

denklemini sağlar. Aslında eğer Şekil 10'daki gibi P ne OA'da ne OB'de ise, o zaman OA'da olan bir C için ve OB'de olan bir D için $OCPD$ bir paralelkenardır, ve bu durumda

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD},$$

dolayısıyla

$$a = \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OA}, \qquad\qquad b = \overrightarrow{OD} : \overrightarrow{OB}.$$



Şekil 10: Kartezyan koordinatlar

Yukarıda (O, A, B) sıralı üçlüsü, bir **kartezyan koordinatlar sistemini** kurur. Eğer

$$A = O + \overrightarrow{a}, \qquad B = O + \boldsymbol{b}$$

ise, o zaman aynı sistem

$$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad \text{veya} \quad (O, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

olarak yazılabilir. Bu sistemde (a, b)'nin girdileri, P'nin **kartezyan koordinatlarıdır,** ve

$$P = (a, b)$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 3. *Bir kartezyan sisteme göre*

$$A = (a_1, a_2), \quad B = (b_1, b_2), \quad C = (c_1, c_2), \quad D = (d_1, d_2)$$

olsun. O zaman

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

Önerme 4. *Bir kartezyan sisteme göre*

$$A = (a_1, a_2), \qquad\qquad B = (b_1, b_2)$$

olsun. Eğer oranlar cisminde $2 \neq 0$ *ise, O zaman* AB *doğru parçasının orta noktası vardır, ve bu noktanın koordinatları,*

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

4.2 Doğrular

Bir P noktasının bir CD doğrusunda olması için, bir oranın

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD}$$

denklemini sağlaması, gerek ve yeter bir koşuldur. (O, A, B) sistemine göre

$$C = (c_1, c_2), \qquad\qquad D = (d_1, d_2)$$

olsun, yani

$$\overrightarrow{OC} = c_1 \cdot \overrightarrow{OA} + c_2 \cdot \overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OD} = d_1 \cdot \overrightarrow{OA} + d_2 \cdot \overrightarrow{OB}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{OC} + t \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}) \\
&= (1 - t) \cdot \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{OD} \\
&= (1 - t) \cdot (c_1 \cdot \overrightarrow{OA} + c_2 \cdot \overrightarrow{OB}) + t \cdot (d_1 \cdot \overrightarrow{OA} + d_2 \cdot \overrightarrow{OB}) \\
&= \big((1 - t)c_1 + td_1\big) \cdot \overrightarrow{OA} + \big((1 - t)c_2 + td_2\big) \cdot \overrightarrow{OB} \\
&= \big(c_1 + t(d_1 - c_1)\big) \cdot \overrightarrow{OA} + \big(c_2 + t(d_2 - c_2)\big) \cdot \overrightarrow{OB}.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} \\
\Leftrightarrow\ & x = c_1 + t(d_1 - c_1) \wedge y = c_2 + t(d_2 - c_2) \\
\Leftrightarrow\ & x - c_1 = t(d_1 - c_1) \wedge y - c_2 = t(d_2 - c_2) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} (d_2 - c_2)(x - c_1) = t(d_1 - c_1)(d_2 - c_2) \wedge \\ (d_1 - c_1)(y - c_2) = t(d_1 - c_1)(d_2 - c_2). \end{cases}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak bir noktanın CD'de olması için noktanın kartezyan koordinatlarının

$$(d_2 - c_2)(x - c_1) = (d_1 - c_1)(y - c_2) \tag{6}$$

denklemini sağlaması, gerek ve yeter bir koşuldur. Aynı denklem

$$(d_2 - c_2)x + (c_1 - d_1)y + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0$$

biçiminde yazılabilir.

Tam tersine a ve b'den en az birinin 0'dan farklı olduğu herhangi

$$ax + by + c = 0 \tag{7}$$

denkleminin bir (c_1, c_2) çözümü vardır. Bu durumda denklem

$$a(x - c_1) = -b(y - c_2)$$

biçiminde yazılabilir, dolayısıyla herhangi t için

$$(-bt + c_1, at + c_2)$$

noktası (7)'nin bir çözümüdür. Eğer (d_1, d_2), (c_1, c_2)'den farklı bir çözüm ise, o zaman (7), (6) olarak yazılabilir.

Önerme 5. (7) *ve* $dx + ey + f = 0$ *tarafından tanımlanmış doğruların paralel olması için*

$$ae = bd,$$

gerek ve yeter bir koşuldur.

Eğer bir K cismi verilirse, o zaman K^2 kartezyan çarpımının doğruları, a ve b'den en az birinin 0'dan farklı olmak üzere (7) gibi bir denklem tarafından tanımlasın. O zaman Pappus ve Desargues Teoremleri doğrudur, ve sayfa 14'teki gibi elde edilen oranlar, K cismini oluşturur.

4.3 Kareli denklemler

Bir kartezyan sistemde, koordinatları

$$x^2 + y^2 = 1$$

denklemini sağlayan noktalar standart **elipsi,**

$$x^2 - y^2 = 1$$

denklemini sağlayan noktalar standart **hiperbolü,**

$$x = y^2 \tag{8}$$

denklemini sağlayan noktalar standart **parabolü** oluşturur. Verilen eğrilerin her biri, bir **koniktir.** Elips ve hiperbolden her biri, **merkezlidir,** ve denklemi

$$x^2 \pm y^2 = 1$$

biçiminde yazılabilir; aslında eğrinin merkezi O'dur.

Koniklerin adları daha sonra açıklanacaktir.

Pergeli Apollonius'un tanımına göre, eğer bir (O, A, B) sisteminde bir eğrinin içerdiği her

$$O + x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

noktası için eğri $O + x \cdot \overrightarrow{OA} - y \cdot \overrightarrow{OB}$ noktasını da içerirse, o zaman OA eğrinin bir **diametresidir.** Örneğin OA, standart parabolün bir diametresidir, Aynı şekilde hem OA hem de OB, standart merkezli koniklerin diametresidir.

Önerme 6 (Apollonius [1, I.50]). *Herhangi (O, A, B) sisteminde standart merkezli bir coniğin merkezinden geçen her doğru bir diametredir. Aslında eğer konik, koordinatları (a, b) olan bir C noktasını içerirse, o zaman D'nin koordinatlarının $(b, \mp a)$ olduğu (O, C, D) sisteminin standart merkezli bir coniği aynıdır.*

Kanıt. Şekil 11'e bakın. Varsayıma göre $a^2 \pm b^2 = 1$ ve

$$\overrightarrow{OC} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OD} = b \cdot \overrightarrow{OA} \mp a \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Şimdi

$$\overrightarrow{OP} = s \cdot \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{OD}$$

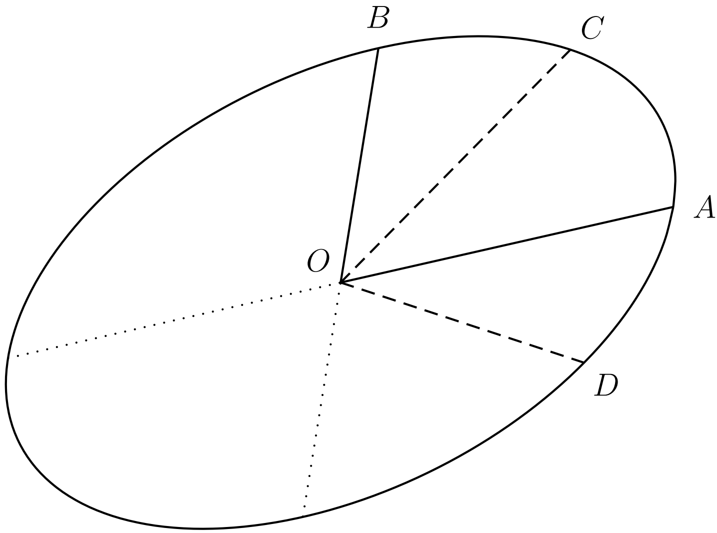
olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s \cdot (a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}) + t \cdot (b \cdot \overrightarrow{OA} \mp a \cdot \overrightarrow{OB}) \\ &= (sa + tb) \cdot \overrightarrow{OA} + (sb \mp ta) \cdot \overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

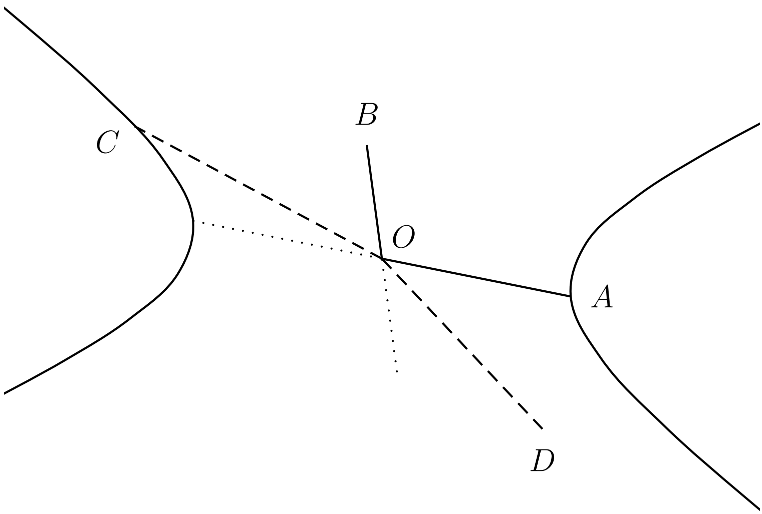
Ayrıca

$$\begin{aligned}&(sa + tb)^2 \pm (sb \mp ta)^2 \\ &= s^2 \cdot (a^2 \pm b^2) + t^2(b^2 \pm a^2) \\ &= s^2 \pm t^2.\end{aligned}$$

□

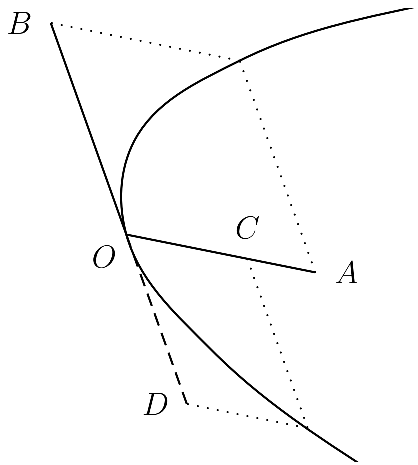


(a) Elips



(b) Hiperbol

Şekil 11: Merkezli konikler



Şekil 12: Parabol

Önerme 7 (Apollonius [1, I.49]). *Bir* $(O, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *sisteminde*

1) *standart parabol,* 0 *olmayan her* t *oranı için*

$$(O, t^2 \cdot \boldsymbol{a}, t \cdot \boldsymbol{b})$$

sisteminin standart parabolü ile aynıdır;

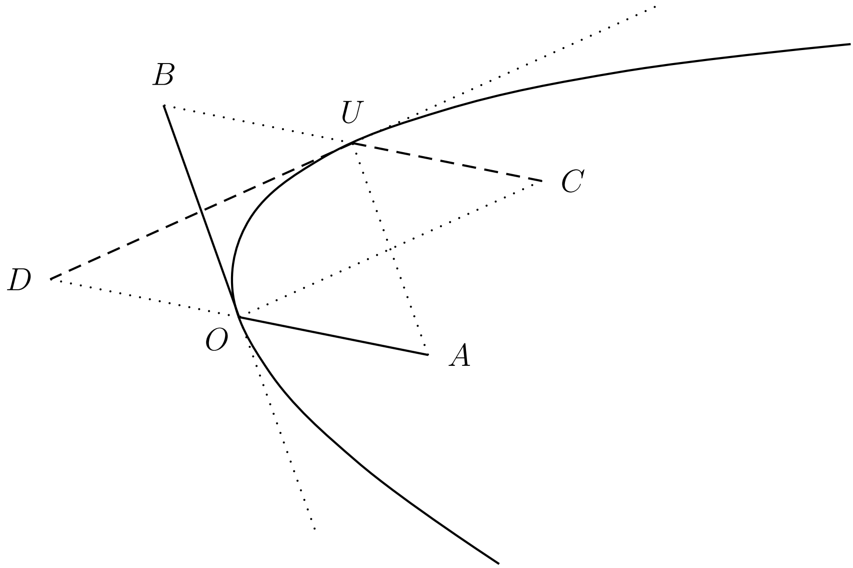
2) *standart parabol,*

$$(O + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, -2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

sisteminin standart parabolü ile aynıdır;

3) *standart parabolün diametrisine paralel olan her doğru bir diametredir.*

Kanıt. 1. Şekil 12'ye bakın . . .



Şekil 13: Parabol

2. Şekil 13'e bakın. Orada

$$O + \boldsymbol{a} = A, \qquad\qquad O + \boldsymbol{b} = B,$$

ve ayrıca

$$O + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = U, \qquad U + \boldsymbol{a} = C, \qquad U - 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = D.$$

Eğer

$$\overrightarrow{UP} = s \cdot \overrightarrow{UC} + t \cdot \overrightarrow{UD}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}\overrightarrow{UP} &= s \cdot \overrightarrow{OA} - t \cdot (2 \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (s - 2t) \cdot \overrightarrow{OA} - t \cdot \overrightarrow{OB},\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{UP} + \overrightarrow{OU} \\ &= (s-2t)\cdot\overrightarrow{OA} - t\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= (s-2t+1)\cdot\overrightarrow{OA} - (t-1)\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}& s-2t+1-(t-1)^2 \\ &= s-2t+1-t^2+2t-1 \\ &= 2-t^2.\end{aligned}$$

3. $\cdots$ ☐

Eğer a, b, ve c oranından en az biri 0 değilse,

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

denkleminin bir koniği tanımladığını göstereceğiz.

Önerme 8. *Katsayıları oran olan herhangi $f(x,y)$ polinomu için bir $(O,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ sisteminde*

$$f(x,y)=0$$

tarafından tanımlanmış eğri,

1) *$(O-c\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ sisteminde $f(x+c,y)=0$,*

2) *$(O-c\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ sisteminde $f(x,y+c)=0$,*

3) *$(O,c^{-1}\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ sisteminde $f(cx,y)=0$,*

4) *$(O,\boldsymbol{a},c^{-1}\cdot\boldsymbol{b})$ sisteminde $f(x,cy)=0$*

tarafından tanımlanmış eğri ile aynıdır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
O + x \cdot \boldsymbol{a} + y \cdot \boldsymbol{b} &= (O - c \cdot \boldsymbol{a}) + (x + c) \cdot \boldsymbol{a} + y \cdot \boldsymbol{b} \\
&= (O - c \cdot \boldsymbol{b}) + x \cdot \boldsymbol{a} + (y + c) \cdot \boldsymbol{b} \\
&= O + cx \cdot (c^{-1} \cdot \boldsymbol{a}) + y \cdot \boldsymbol{b} \\
&= O + x \cdot \boldsymbol{a} + cy \cdot (c^{-1} \cdot \boldsymbol{b}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Önermenin her parçasının başka bir biçimi vardır. Örneğin

- $(O, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ve $(O + c \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sisteminde sırasıyla

  $$f(x + c, y) = 0, \qquad\qquad f(x, y) = 0$$

  tarafından tanımlanmış eğriler birbiriyle aynıdır;
- $(O, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ve $(O, +c \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sisteminde sırasıyla

  $$f(cx, y) = 0, \qquad\qquad f(x, y) = 0$$

  tarafından tanımlanmış eğriler birbiriyle aynıdır.

5 Uzunluklar

Kaynakça

[1] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III.* Green Lion Press, Santa Fe, NM, revised edition, 1998. Translated and with a note and an appendix by R. Catesby Taliaferro, with a preface by Dana Densmore and William H. Donahue, an introduction by Harvey Flaumenhaft, and diagrams by Donahue, edited by Densmore.

[2] E. Artin. *Geometric Algebra.* Interscience, New York, 1957.

[3] Frances Marguerite Clarke and David Eugene Smith. "Essay pour les Coniques" of Blaise Pascal. *Isis*, 10(1):16–20, March 1928. Translation by Clarke, Introductory Note by Smith. `www.jstor.org/stable/224736`.

[4] Girard Desargues. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra*, volume 1. Leiber, Paris, 1864. `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k993793`, accessed January 8, 2020.

[5] Girard Desargues. Desargues on perspective triangles. In David Eugene Smith, editor, *A Source Book in Mathematics*, 2 vols, pages 307–10. Dover Publications, New York, 1959. Translated by Lao G. Simons from [4], pp. 413–5, 430–3.

[6] René Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[7] René Descartes. *La Géométrie.* Jacques Gabay, Sceaux, France, 1991. Reprint of Hermann edition of 1886.

[8] Euclid. *The Bones: A handy where-to-find-it pocket reference companion to Euclid's* Elements. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. Conceived, designed, and edited by Dana Densmore.

[9] Euclid. *Euclid's Elements.* Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. All thirteen books complete in one volume. The Thomas L. Heath translation, edited by Dana Densmore.

[10] Euclid. *Öklid'in* Öğeler*'inin 13 Kitabından Birinci Kitap.* Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 5th edition, September 2015. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce, and exercises by Pierce.

[11] Thomas Heath. *Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus.* Clarendon Press, Oxford, 1913. A history of Greek astronomy to Aristarchus together with Aristarchus's treatise on the sizes and distances of the sun and moon: a new Greek text with translation and commentary.

[12] Herodotus. *The Persian Wars, Books I–II*, volume 117 of *the Loeb Classical Library.* Harvard University Press, Cambridge MA and London, 2004. Translation by A. D. Godley; first published 1920; revised, 1926.

[13] Gerhard Hessenberg. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Math. Ann.*, 61(2):161–172, 1905.

[14] David Hilbert. *The Foundations of Geometry.* Authorized translation by E. J. Townsend. Reprint edition. The Open Court Publishing Co., La Salle, Ill., 1959. Based on lectures 1898–99. Translation copyrighted 1902. Project Gutenberg edition released December 23, 2005 (`www.gutenberg.net`).

[15] David Hilbert. *Foundations of Geometry.* Open Court, La Salle, Illinois, 1971. Second English edition, translated by Leo

Unger from the Tenth German edition, revised and enlarged by Paul Bernays.

[16] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.

[17] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation. Part 2. Commentary, Index, and Figures.* Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.

[18] Pappus of Alexandria. Öklid'in Porizmalar'ı için Derleme'nin yedinci kitabı'nın 38 lemmasından ilk 19 lemması. `mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Geometriler/`, March 2019. The First 19 of the 38 Lemmas for Euclid's Porisms in the Seventh Book of the Collection. Turkish translation from [16] by David Pierce.

[19] Dimitris Patsopoulos and Tasos Patronis. The theorem of Thales: A study of the naming of theorems in school geometry textbooks. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1), 2006. `www.comap.com/historyjournal/index.html`, accessed September 2016.

[20] Ptolemy. *Ptolemy's Almagest.* Princeton University Press, 1998. Translated and annotated by G. J. Toomer. With a foreward by Owen Gingerich. Originally published by Gerald Duckworth, London, 1984.

[21] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. `www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488`.