Analitik Geometri Özeti

David Pierce

3 Nisan 2015, 10:49

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Şekil Listesi

1 Denklik bağıntıları

Tanım 1. Doğal sayılar, 1, 2, 3, ... Bunlar $\mathbb{N}$ kümesini oluşturur:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(Bu ifadede = işareti *aynılığı* gösterir, yani $\mathbb{N}$ ve $\{1, 2, 3, \dots\}$ aynı kümedir.)

Söz 2. İlkokuldan bildiğimiz gibi iki doğal sayı toplanabilir ve çarpılabilir, ve doğal sayılar sıralanır.

Tanım 3. Sıralı ikililer,

$$(a, b) = (x, y) \iff a = x \ \ \& \ \ b = y$$

özelliğini sağlar. Tüm A ve B kümeleri için

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \ \ \& \ \ y \in B\}.$$

Tanım 4. Bir A kümesinin yansımalı, simetrik, ve geçişli iki-konumlu R bağıntısı, A kümesinin **denklik bağıntısıdır.** A kümesinin b elemanının R **bağıntısına göre denklik sınıfı** veya R**-sınıfı,**

$$\{x \in A \colon x \mathrel{R} b\}$$

kümesidir.[1] Bu denklik sınıfı için

$$[b]$$

kısaltması kullanılabilir (ama Teorem 5'ten sonra kullanılmayacak).

[1] Bu kümeye "denklik sınıfı" demek, bir gelenektir. Kümeler kuramında her küme bir sınıftır, ama her sınıf küme değildir. Örneğin $\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, küme olamaz.

Teorem 5. *R, A kümesinin denklik bağıntısı olsun, ve $b \in A$, $c \in A$ olsun. Ya*

$$[b] = [c]$$

ya da

$$[b] \cap [c] = \varnothing.$$

Tanım 6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\approx$ bağıntısı,

$$(k, \ell) \approx (x, y) \iff ky = \ell x$$

tanımını sağlasın.

Teorem 7. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\approx$ bağıntısı, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin (k, ℓ) elemanının $\approx$-sınıfı,

$$\frac{k}{\ell}$$

veya k/ℓ **pozitif kesirli sayısıdır.** Pozitif kesirli sayılar,

$$\mathbb{Q}^+$$

kümesini oluşturur.

Teorem 9. *Aşağıdaki eşitlikler, $\mathbb{Q}^+$ kümesinin toplama ve çarpma işlemleri için iyi tanımdır:*

$$\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{kn + \ell m}{\ell n}, \qquad \frac{k}{\ell} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{\ell n}.$$

Yani

$$\frac{k}{\ell} = \frac{k'}{\ell'} \ \& \ \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \implies \frac{kn + \ell m}{\ell n} = \frac{k'n' + \ell' m'}{\ell' n'} \ \& \ \frac{km}{\ell n} = \frac{k'm'}{\ell' n'}.$$

Ayrıca $\mathbb{Q}^+$ aşağıdaki tanıma göre sıralanır:

$$\frac{k}{\ell} < \frac{m}{n} \iff kn < \ell m.$$

2 Uzunluklar

Tanım 10. Öklid'deki gibi bir **doğrunun** uç noktaları vardır, ve çakışan doğrular **eşittir.** (Özel olarak doğrular için eşitlik aynılık değildir.)

Teorem 11. *Doğruların eşitliği, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 12. Doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğudur.** Küçük a, b, c, . . . Latin harfleri uzunluk gösterecek. Eğer bir AB doğrusunun uzunluğu c ise

$$AB = c$$

ifadesini yazarız.[2]

Teorem 13. *İki uzunluk toplanabilir, ve bir kesirli sayı bir uzunluğu çoğaltabilir. Toplama değişmeli ve birleşmelidir, ve çoğaltma toplama üzerine dağılır. Eğer $a < b$ ise*

$$a + x = b$$

denklemi çözülebilir.

Teorem 14. *Eğer $CD = BK$ ve $GH = FL$ ise, ve Şekil 1'deki gibi ABK ve EFL üçgenlerinde $\angle ABK$ ve $\angle EFL$ dik ve $\angle BAK = \angle FEL$*

Şekil 1: Benzer dik üçgenler

ise, o zaman

$$(AB, CD)\ \mathscr{R}\ (EF, GH)$$

[2]Bu uygulama Descartes'ın 1637 *Geometri* kitabından gelir.

olsun. Bu $\mathscr{R}$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca sadece doğruların uzunluğuna bağlıdır.

Tanım 15. Eğer Teorem 14'teki gibi $(AB, CD)\ \mathscr{R}\ (EF, GH)$ ise AB, CD, EF, ve GH doğruları **orantılıdır,** ve

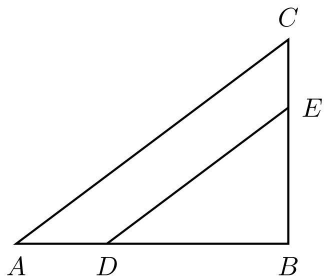
$$AB : CD :: EF : GH$$

orantısını yazarız; ayrıca $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, ve $GH = d$ ise

$$a : b :: c : d$$

ifadesini yazarız. Buradaki $AB : CD$ ve $a : b$ ifadeleri, (AB, CD) ve (a, b) sıralı ikililerinin denklik sınıfını gösterir; bu sınıf, bir **orandır.** Bu durumda :: simgesi, oranların *aynılığını* gösterir.

Teorem 16. *Şekil 2'de ABC açısı dik ise*



Şekil 2: Paralellik ve orantılılık

$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$

Teorem 17. $a : b :: a : c \implies b = c.$

Teorem 18. *Her $a : x :: x : b$ orantısı çözülebilir.*

Teorem 19. $a : b :: d : e\ \&\ b : c :: e : f \implies a : c :: d : f.$

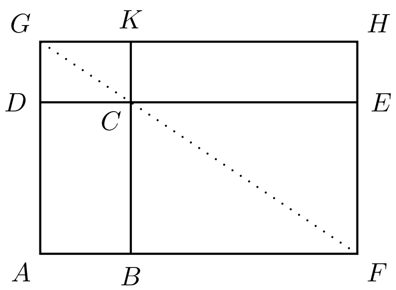
Tanım 20. $c : d :: b : e$ ise

$$(a : b)\ \&\ (c : d) :: b : e,$$

ve $b : e$ oranı, $a : b$ ve $c : d$ oranlarının **bileşkesidir.**

3 Alanlar

Teorem 21. *Aynı genişliği ve yüksekliği olan dikdörtgenler eşittir. Şekil 3'te $ABCD$ ve $CEHK$ dikdörtgenleri eşittir ancak ve ancak GC ve*



Şekil 3: Dikdörtgenlerin eşitliği

CF bir doğrudadır.

Tanım 22. Dikdörtgenin **alanı,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a ve yüksekliği b olan dikdörtgenin alanı

$$a \cdot b$$

veya ab ile gösterilir. Ayrıca $a \cdot a$ alanı

$$a^2$$

ile gösterilir.

Teorem 23. *Uzunlukların çarpması değişmelidir ve toplama üzerine dağılır. Ayrıca*
$$ab = ac \implies b = c.$$

Teorem 24. $a : b :: c : d \iff ad = bc \iff a : c :: b : d.$

Teorem 25. $a : b :: c : d \implies a : b :: a \pm c : b \pm d.$

Teorem 26. $ab = de \;\&\; ac = df \implies b : c :: e : f.$

Teorem 27. *Her* $ab = cx$ *denklemi çözülebilir.*

Tanım 28. Teorem 26 ve 27'ye göre alanların **oranı**
$$ab : ac :: b : c$$
ile tanımlanabilir.

Teorem 29. $ab : cd :: ab : ef \implies cd = ef.$

Teorem 30. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : ef :: cd : gh.$

Teorem 31. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : cd :: ab + ef : cd + gh.$

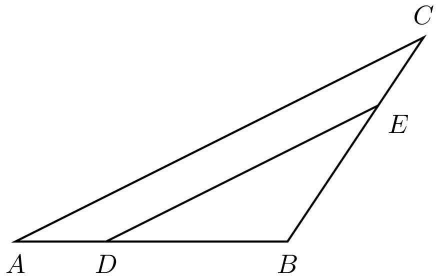
Teorem 32. $a : b :: c : d \iff a^2 : b^2 :: c^2 : d^2.$

Tanım 33. Açıları sırasıyla eşit olan üçgenler **benzerdir.**

Teorem 34. *Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır, yani* ABC *ve* DEF *benzer ise*
$$AB : BC :: DE : EF.$$

Teorem 35. *Şekil 4'te* ABC *herhangi üçgen olsun.*
$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$

Teorem 36. $(a : b) \;\&\; (c : d) :: ac : bd.$



Şekil 4: Paralellik ve orantılılık

4 Koni kesitleri ve paraboller

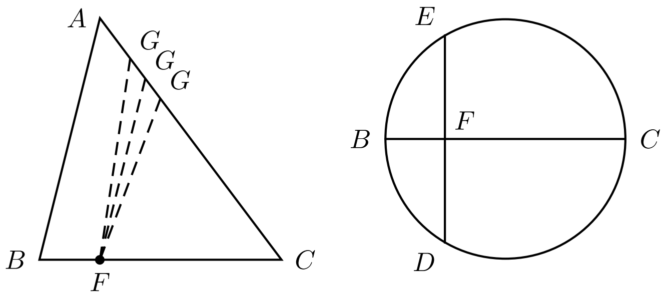
Tanım 37. Bir daire ve aynı düzlemde olmayan bir nokta, bir **koniyi** ($\kappa\tilde{\omega}\nu o\varsigma$ "çam kozalağı") belirtir. Daire, koninin **tabanıdır,** ve nokta, koninin **tepe noktasıdır.** Koninin **yüzeyi,** tepe noktasından tabanın sınırına giden doğrular tarafından oluşturulur. Koninin tepe noktasından tabanın merkezine giden doğru, koninin **eksenidir** (ἄξων "dingil"). Her durumda, ekseni içeren her düzlem, koniyi bir üçgende keser. Bu üçgene **eksen üçgeni** denebilir.

Söz 38. Koninin ekseni, koninin tabanına dik olmayabilir. Koninin eksen üçgeninin tabanı, koninin tabanının bir çapıdır.

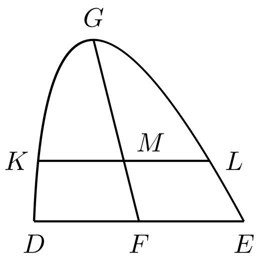
Teorem 39. *Bir koninin bir eksen üçgeni, Şekil 5'teki gibi tabanı BC olan ABC üçgeni olsun. Koninin tabanının DE kirişi çizilsin, ve bu kiriş, BC çapına dik olsun. O zaman kiriş, çap tarafından bir F noktasında ikiye bölünür, ve*

$$DF^2 = BF \cdot FC. \qquad (*)$$

Tanım 40. Teorem 39 durumunda DE kirişini içeren bir düzlem, eksen üçgeninin AC kenarını bir G noktasında kessin. O zaman bu düzlem, koninin yüzeyini Şekil 6'daki gibi bir DGE eğrisinde keser. Bu eğriye **koni kesiti** denir. DE doğrusu, eğrinin bir kirişidir.



Şekil 5: Koninin eksen üçgeni ve tabanı

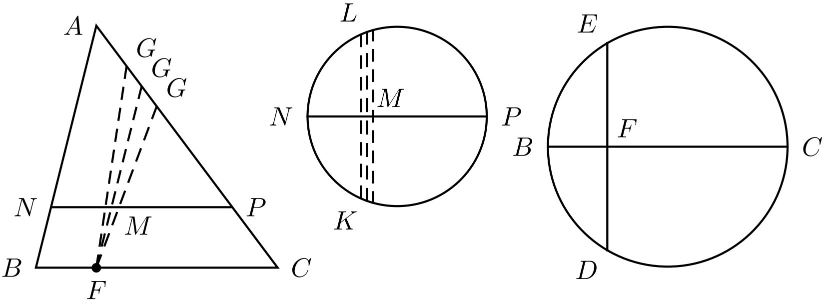


Şekil 6: Bir koni kesiti

Teorem 41. *KL doğrusu, yukarıdaki koni kesitinin başka bir kirişi olsun, ve bu kiriş, DE kirişine paralel olsun. KL kirişi ve FG doğrusu bir M noktasında kesişir. Ayrıca koninin tabanına paralel olan ve KL kirişini içeren bir düzlem vardır. Bu düzlem,*

- *ABC üçgenini BC tabanına paralel olan bir NP doğrusunda keser, ve*
- *koninin kendisini, çapı NP olan bir dairede keser.*

Şekil 7'ye bakın. Koni kesitinin LK kirişi, bu yeni dairenin kirişidir, ve dairenin NP çapına diktir, dolayısıyla $KM = ML$. Bu şekilde GF ışını, DGE koni kesitinin DE kirişine paralel olan her kirişi ikiye böler.



Şekil 7: Koninin eksen üçgeni ve tabanları

Tanım 42. Tanım 40 ve Teorem 41'de G noktası, koni kesitinin **köşesidir,** ve GF ışını koni kesitinin bir **çapıdır,** çünkü DE kirişine paralel olan kirişleri ikiye böler. Eğer çap, ikiye böldüğü ve birbirine paralel olan kirişlere dik ise, ona **eksen** denir. Ama her durumda DE kirişinin DF (veya EF) yarısına **ordinat** denir, ve çapın GF parçasına, DF ordinatına karşılık gelen **absis** denir.

Söz 43. O zaman KM ve LM doğruları da ordinattır, ve onlara karşılık gelen absis, GM doğrusudur.

Teorem 44. *Şekil 7'deki durumda $FG \parallel BA$ olsun. O zaman*

$$GM : GF :: ML^2 : FE^2.$$

Sonuç olarak bir ℓ uzunluğu için, koni kesitinin herhangi ordinatının uzunluğu y ve ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu x ise

$$y^2 = \ell x.$$

Ayrıca

$$\ell : GA :: CB^2 :: CA \cdot CB.$$

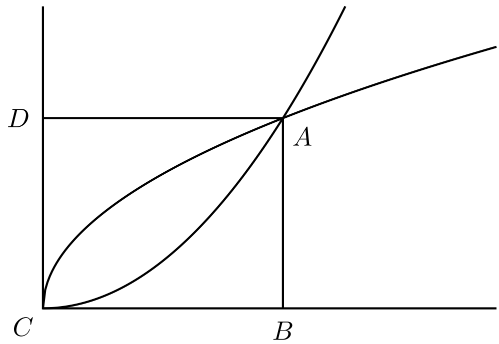
Tanım 45. Teorem 44'teki koni kesiti **paraboldür** ($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$ "uygulama, yerleştirme"), ve ℓ, parabolün **parametresidir** ve parabolün

dikey kenarının uzunluğudur.[3]

Teorem 46 (Menaechmus). *Parametreleri a ve b olan paraboller ile*

$$a : x :: x : y :: y : b$$

orantıları Şekil 8'deki gibi çözülebilir. Parametresi b olan parabolün bir



Şekil 8: İki orta orantılı

ordinatı AB ve ona karşılık gelen absis CB ise, ve parametresi a olan parabolün bir ordinatı AD ve ona karşılık gelen absis CD ise, ve her parabolün ordinatları diğer parabolün çapına paralel ise, o zaman CB ve CD doğrularının uzunlukları yukarıdaki orantıları çözer.

5 Hacimler

Tanım 47. Dik paralelyüzün **hacmi,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a, yüksekliği b, ve derinliği c olan dik paralelyüzün hacmi

$$a \cdot b \cdot c$$

veya abc ile gösterilir.

[3]Dikey kenarın Latincesi, *latus rectum.*

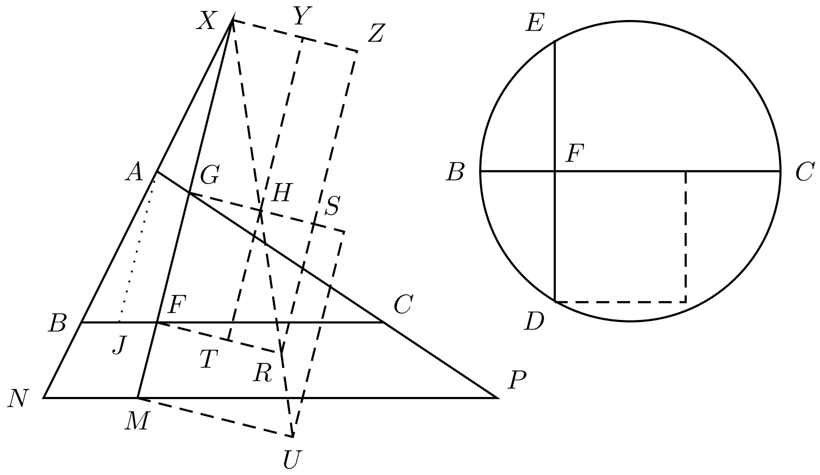
Teorem 48. $abc = bac = bca$ *ve* $ab(c+d) = abc + abd$.

Teorem 49. $abc = ade \implies bc = de$.

Teorem 50. $ab : cd :: e : f \iff abf = cde$.

6 Hiperboller

Teorem 51. *Şekil 5'te koni kesitinin GF çapı G noktasının ötesine uzatılırsa, Şekil 9'daki gibi BA doğrusunun uzatılmasını bir X noktasında kessin. FR doğrusu, GF çapına dik olsun ve*



Şekil 9: Konide hiperbol

$$FR \cdot FG = DF^2 \qquad (\dagger)$$

eşitliğini sağlasın. $MU \parallel FR$ olsun, ve (gerekirse uzatılmış) XR ve MU, U noktasında kesişsin. O zaman

$$GM \cdot MU = KM^2.$$

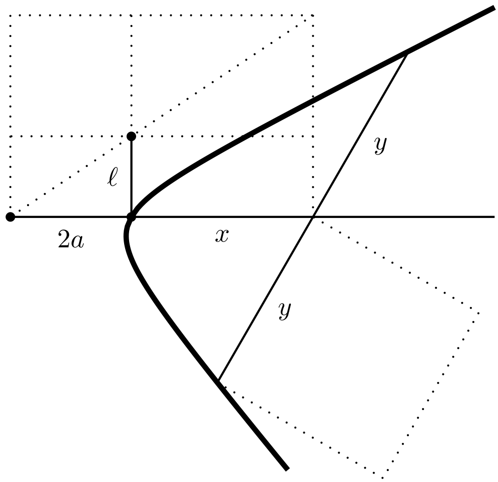
(KM, Şekil 7'deki gibidir.) $AJ \parallel XF$ olsun; o zaman

$$GH : GX :: BJ \cdot JC : AJ^2.$$

GH doğrusunun uzunluğu ℓ olsun, ve GX doğrusunun uzunluğu $2a$ olsun. Koni kesitinin herhangi bir ordinatının uzunluğu y ve bu ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu x ise

$$2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2.$$

Söz 52. Şekil 10'e bakın; buradaki ℓ-işaretli doğru, koni kesitinin düz-



Şekil 10: $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

lemine dik olarak düşünülebilir.

Tanım 53. Teorem 51'de alanı y^2 olan kare, alanı ℓx olan dikdörtgenini aştığından, koni kesitine **hiperbol** (ὑπερβολή "aşma") denir; GH doğrusu, hiperbolün **dikey kenarıdır;** dikey kenarın ℓ uzunluğu, hiperbolün **parametresidir;** GX doğrusu, hiperbolün **yanlamasına kenarıdır;**[4] yanlamasına kenarın orta noktası, hiperbolün **merkezidir.**

Söz 54. Şekil 9'da FS ve FH dikdörtgenlerinin farkı TS dikdörtgendir, ve bu dikdörtgen GY dikdörtgenine benzerdir.[5]

7 İşaretli uzunluklar ve elipsler

Tanım 55. Bir yön ile donatılmış bir doğru, bir **yönlü doğrudur.** Eğer AB, A'dan B'ye yön ile donatılırsa, oluşan yönlü doğru

$$\overrightarrow{AB}$$

biçiminde yazılabilir. $\overrightarrow{AA}$, **yoz** veya **dejenere** yönlü doğrudur ve A noktası olarak anlaşılabilir. Eğer $ABDC$ ve $DCEF$ paralelkenar ise, o zaman

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF},$$

Özel olarak $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Teorem 56. *Doğruların paralelliği ve yönlü doğruların eşitliği, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 57. Yönlü doğrunun eşitlik sınıfı, **vektördür.**

Tanım 58. Her paralellik sınıfı için bir yön **pozitif,** diğer yön **negatif** olsun. O zaman her (yoz olmayan) yönlü doğru ya pozitif ya negatiftir. Bir yönlü doğrunun pozitifliği veya negatifliği, yönlü doğrunun **işaretidir.**

Teorem 59. *A, B, ve C bir doğruda olsun. O zaman $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yönlü doğrularının işaretleri aynıdır ancak ve ancak $AB < AC$ ve $BC < AC$.*

[4] $\pi\lambda\acute{\alpha}\gamma\iota\alpha$ $\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}$; Latincesi *latus transversum.*
[5] Bu GY dikdörtgeni, hiperbolün **şeklidir** (εἶδος).

Teorem 60. *Aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathscr{R}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır: $\overrightarrow{AB} \mathrel{\mathscr{R}} \overrightarrow{CD}$ ancak ve ancak $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğrularının işaretleri aynı ve $AB = CD$.*

Tanım 61. Teorem 60'taki denklik bağıntısına göre bir yönlü doğrunun denklik sınıfı, **yönlü doğrunun uzunluğudur.**

Söz 62. Bir doğrunun uzunluğu, yeni tanımı alabilir: $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğrularının uzunluklarının hangisi pozitif ise, AB doğrusunun uzunluğu olarak alınabilir. Bu tanımı başlangıçtan kullanabildik.

Tanım 63. Küçük a, b, c, ... Latin harfleri, yönlü doğrunun uzunluğunu (yani işaretli uzunluğunu) gösterecek. Yoz yönlü doğrunun uzunluğu,

$$0$$

olsun, ve $\overrightarrow{AB} = c$ ise

$$-c = \overrightarrow{BA}$$

olsun.

Teorem 64. *İki işaretli uzunluk toplanabilir, ve tanıma göre A, B, ve C bir doğruda ve*

$$\overrightarrow{AB} = d, \qquad \overrightarrow{BC} = e, \qquad \overrightarrow{AC} = f$$

ise

$$d + e = f.$$

Bu durumda toplama değişmeli ve birleşmelidir; ayrıca

$$a + 0 = a,$$
$$a + (-a) = 0.$$

Tanım 65.

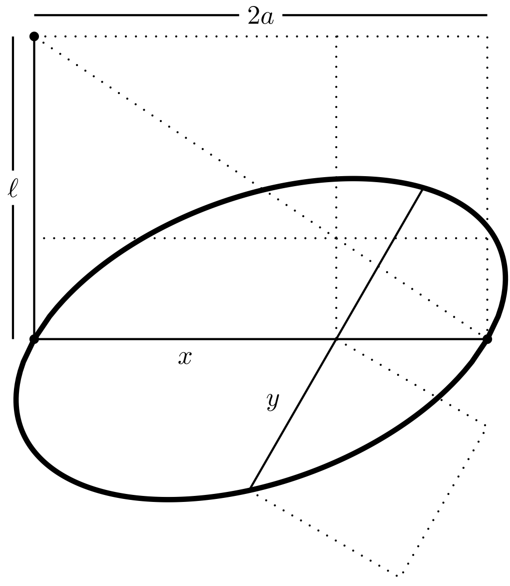
$$a - b = a + (-b),$$
$$-a \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b),$$
$$-a \cdot bc = a \cdot (-b) \cdot c = ab \cdot (-c) = -(abc).$$

Şimdi hiperbolün $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ denkleminde x ve y negatif olabilir. Ayrıca a negatif olabilir, ama bu durumda tanımlanan eğri hiperbol değildir:

Tanım 66. $\ell > 0$ ve $a > 0$ ise

$$2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$$

denklemi, **dikey kenarının** uzunluğu ℓ olan, **yanlamasına kenarının** uzunluğu $2a$ olan **elipsi** (ἔλλειψις "eksiklik") tanımlar (ama ordinatların çapa açısını seçilmeli). Şekil 11'e bakın. Hiperboldeki gibi



Şekil 11: $2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$ elipsi

elipsin **merkezi,** yanlamasına kenarının orta noktasıdır. Hiperbol ve elips, **merkezli koni kesitidir.**

Teorem 67. *Teorem 51'de koni kesitinin GF çapı F noktasının ötesine uzatılırsa ve AB doğrusunun uzatılmasını keserse, hiperbolün yerine elips çıkar.*

Söz 68. Şimdi her koni kesiti ya parabol ya hiperbol ya da elipstir. Pergeli Apollonius bu adları vermiştir. Parabol olmayan her koni kesiti merkezlidir.

8 Eksenler

Tanım 69. Düzlemde iki doğru bir O noktasında kesişsin. Doğruların birine x **ekseni,** diğerine y **ekseni** densin, ve O noktasına **başlangıç noktası** densin.

Teorem 70. *Düzlemde her A noktası için x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, $ABOC$ paralelkenardır. Tam tersine b ve c işaretli uzunluk olmak üzere, herhangi bir (b, c) sıralı ikilisi için, x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, düzlemde bir ve tek bir A için*

$$\overrightarrow{OB} = b, \qquad \overrightarrow{OC} = c,$$

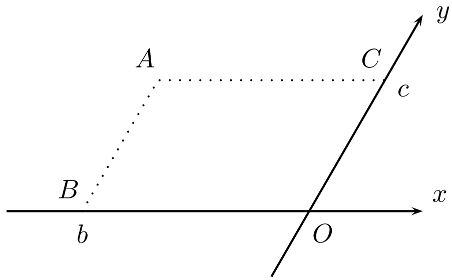
ve $ABOC$ paralelkenardır.

Tanım 71. Teorem 70'te b, A noktasının x **koordinatıdır,** ve c, A noktasının y **koordinatıdır.** Şekil 12'deki gibi B noktasına b yazılabilir, ve C noktasına c yazılabilir.

Söz 72. Şekil 13'teki koordinatları (b, c) olan nokta hiperboldeyse, koordinatları $(b, -c)$, $(-2a - b, c)$, ve $(-2a - b, -c)$ olan noktaları da hiperboldedir.

Teorem 73. *Denklemi $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ olan hiperbolü verilsin, ama yeni st eksenleri seçilsin. Eğer*

- *s ekseni, x eksenidir, ve*



Şekil 12: Koordinatlar

• *t ekseni, hiperbolün merkezinden geçer ve y eksenine paralel ise, o zaman yeni st eksenlerine göre hiperbolün denklemi,*

$$2at^2 = \ell s^2 - \ell a^2.$$

Teorem 74. *İşaretli uzunlukların oranı*

$$a : b :: c : d \iff ad = bc$$

kuralına göre tanımlanabilir. Oranların toplamı

$$(a : c) + (b : c) :: (a + b) : c$$

kuralına göre tanımlanabilir.

Söz 75. Şimdi oranları sayılar gibi kullanabiliriz.

Tanım 76. $a : a$ oranı

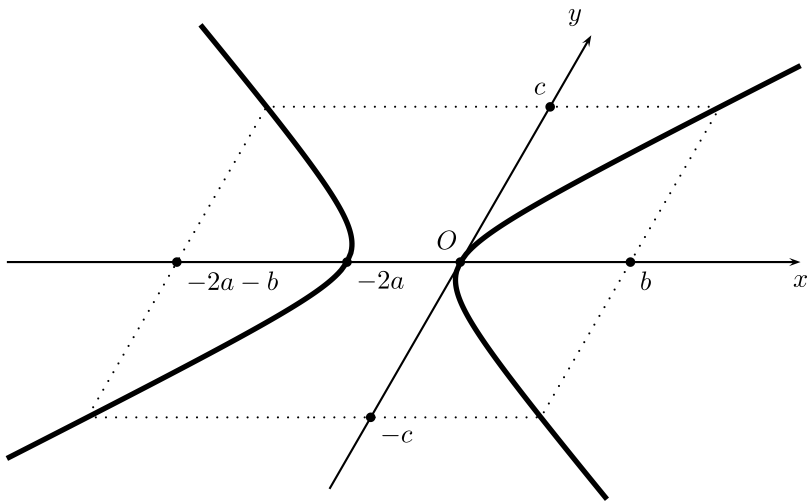
$$1$$

olarak yazılsın, ve $a : b$ oranı

$$\frac{a}{b}$$

veya a/b biçiminde yazılsın. O zaman hiperbolün $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ denklemi

$$y^2 = \ell x + \frac{\ell}{2a}x^2$$



Şekil 13: İkinci dalı ile $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **Apollonius denklemi** diyelim. Teorem 74'e göre, farklı eksenlere göre, hiperbolün $2ay^2 = \ell x^2 - \ell a^2$ denklemi de vardır; bu denklem

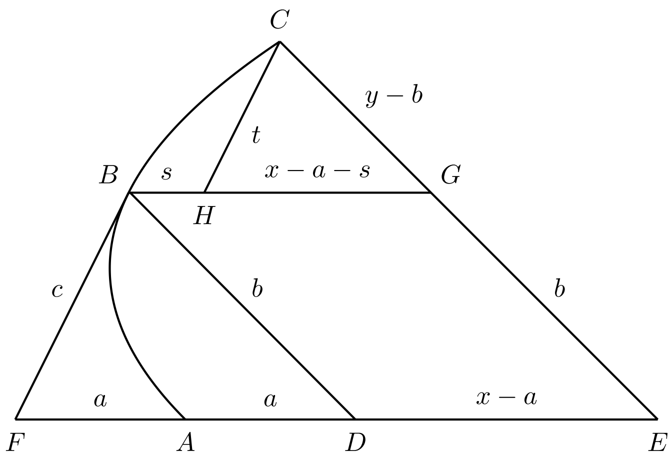
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\ell a/2} = 1$$

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **merkez denklemi** diyelim.

9 Dik eksenler

Teorem 77. *Parabolde çapa paralel olan her doğru, yeni bir çaptır. Şekil 14'teki gibi*

1) *ABC eğrisi, çapı FE ve köşesi A olan parabol,*
2) *BD ve CE ordinat,*
3) *$FA = AD$, ve*



Şekil 14: Parabolün yeni çapı

4) $BG \parallel FE$, $CH \parallel BF$
olsun. Aşağıdaki işaretli uzunlukları tanımlansın:

$$\overrightarrow{AD} = a, \quad \overrightarrow{AE} = x, \quad \overrightarrow{BH} = s, \quad \overrightarrow{FB} = c.$$
$$\overrightarrow{DB} = b, \quad \overrightarrow{EC} = y, \quad \overrightarrow{HC} = t,$$

Parabolün dikey kenarının uzunluğu ℓ *ise*

$$\frac{m}{\ell} = \frac{c^2}{b^2}$$

olsun. O zaman

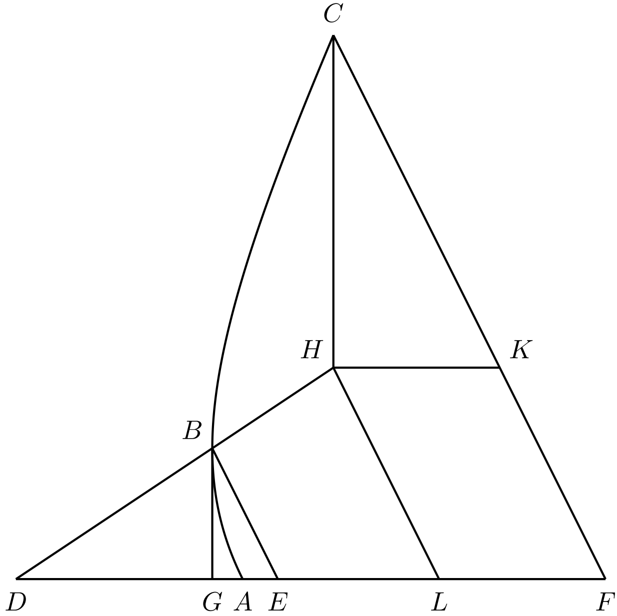
$$y^2 = \ell x$$

olduğundan

$$t^2 = ms.$$

Teorem 78. *Parabolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir (yani Tanım 37'deki gibi parabolün ekseni ve tek bir ekseni vardır).*

Teorem 79. *Hiperbolün merkezinden geçen ve hiperbolü kesen her doğru, hiperbolün yeni bir çapıdır. Şekil 15'teki gibi*



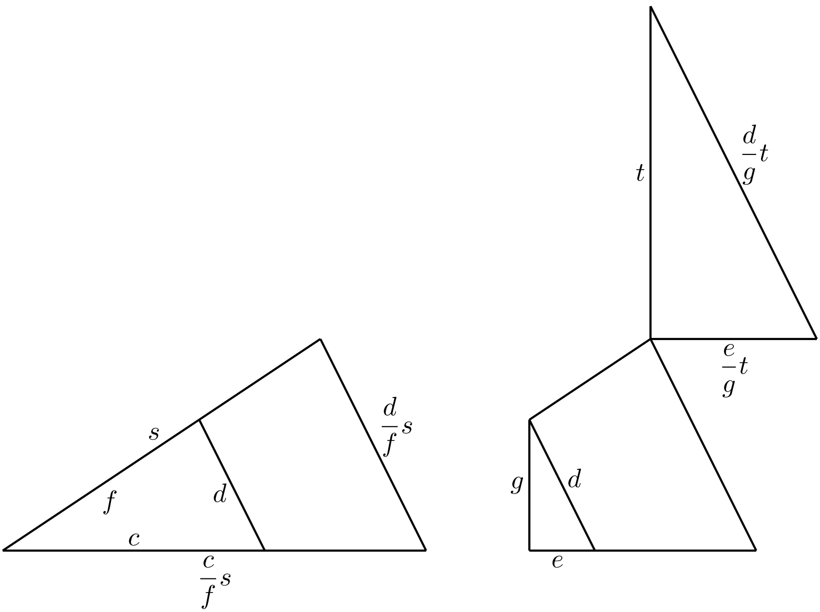
Şekil 15: Hiperbolün yeni çapı

1) *ABC eğrisi, merkezi D olan ve çapı DF olan hiperbol,*
2) *BE ve CF ordinat,*
3) *$DG : DA :: DA : DE$,*
4) *$CH \parallel BG$, $HK \parallel DA$, $HL \parallel BE$*

olsun. Aşağıdaki işaretli uzunluklar tanımlansın:

$$\overrightarrow{DF} = x, \quad \overrightarrow{DH} = s, \quad \overrightarrow{DE} = c, \quad \overrightarrow{DA} = a, \quad \overrightarrow{DB} = f,$$
$$\overrightarrow{FC} = y, \quad \overrightarrow{HC} = t, \quad \overrightarrow{EB} = d, \quad \overrightarrow{GE} = e, \quad \overrightarrow{GB} = g.$$

(Şekil 16'ya bakın.) Hiperbolün dikey kenarının uzunluğu ℓ *ve* $2b^2 = \ell a$



Şekil 16: Hiperbolün benzer üçgenleri

ise

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olduğundan

$$\frac{s^2}{f^2} - \frac{t^2}{g^2c/e} = 1.$$

Teorem 80. *Hiperbolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir, yani hiperbolün bir (ve tek bir) ekseni vardır.*

10 Uzaklık

Söz 81. Dik üçgenle $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin çözümü bulunabilir.

Tanım 82. $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin (pozitif) çözümü

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tanım 83. Eksenler verilirse, "koordinatları (a, b) olan nokta" ifadesinin yerine "(a, b) noktası" diyebiliriz.

Teorem 84. *Eksenler dik ise (a, b) noktasının (c, d) noktasından uzaklığı*

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Tanım 85. Eksenler dik ve $a \neq c$ ise ucu (a, b) ve (c, d) olan doğrunun **eğimi**

$$\frac{b-d}{a-c}.$$

Söz 86. Tanım 85'te eksenlerin dik olması gerekmez ama normaldir.

Teorem 87. *Paralel doğruların eğimleri aynıdır. Dik eksene göre, $a \neq c$ ise (a, b) ve (c, d) noktalarından geçen uçsuz doğrunun noktaları,*

$$y = \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. Eğimi e/f olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$y = \frac{e}{f} \cdot (x-a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. y eksenine paralel olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$x = a$$

denklemini sağlayan noktalarıdır.

Söz 88. Şu anda Descartes'ın ortaya koyduğu uylaşım uygundur:

Tanım 89. Bir **birim** uzunluğu seçilirse,

$$1$$

olarak yazılabilir. Eğer $a \cdot b = c \cdot 1$ ise, o zaman ab alanı c olarak anlaşılabilir. Bu şekilde alan, hacim, oran—her şey bir uzunluk olur. Özel olarak eğim, bir harf ile yazılabilir.

Teorem 90. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre* y *eksenine paralel olmayan doğrunun denkliği*

$$y = mx + b$$

biçiminde yazılabilir, ve bunun gibi her denklem, eğimi m *olan ve* $(0, b)$ *noktasından geçen doğruyu tanımlar. Benzer şekilde* $a \neq 0$ *veya* $b \neq 0$ *ise (yani* $a^2 + b^2 \neq 0$ *ise)*

$$ax + by + c = 0$$

denklemi bir doğru tanımlar, ve her doğrunun denklemi bu şekilde yazılabilir.

Tanım 91. Şekil 17'de $\angle BAC$ dik ise

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Burada α, $\angle BAC$ açısının eşitlik sınıfı olarak anlaşılabilir, ve $\cos\alpha$, açının **kosinüsüdür.** Dik açının ölçüsü

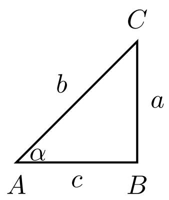
$$\frac{\pi}{2}.$$

O zaman

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

ve β geniş açı ise

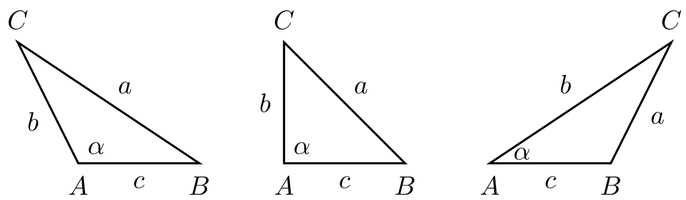
$$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta).$$



Şekil 17: Kosinüs tanımı

Teorem 92 (Kosinüs Teoremi)**.** *Şekil 18'de*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



Şekil 18: Kosinüs Teoremi

Tanım 93. Dik eksenlere göre

$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd,$$
$$\|(a, b)\| = \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(a, b) noktası, $(0, 0)$ başlangıç noktasından (a, b) noktasına giden yönlü doğru olarak anlaşılabilir.

Teorem 94. *Dik eksenlere göre* (a, b) *ve* (c, d) *arasındaki açı* θ *ise*

$$(a, b) \cdot (c, d) = \|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\| \cdot \cos\theta.$$

Teorem 95 (Cauchy–Schwartz Eşitsizliği)**.**

$$(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2).$$

Tanım 96 (mutlak değer)**.** $|a| = \begin{cases} a, & \text{eğer } a \geqslant 0 \text{ ise,} \\ -a, & \text{eğer } a < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Teorem 97. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre* (s,t) *noktasının* $ax+by+c=0$ *doğrusuna uzaklığı*

$$\frac{|as+bt+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

11 Dik eksenlere göre koni kesitleri

Tanım 98. $a \neq 0$ ise

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Söz 99*.* Şimdi $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ ise, dik eksenlere göre,

$$y^2 = \ell x - \frac{\ell}{2a}x^2$$

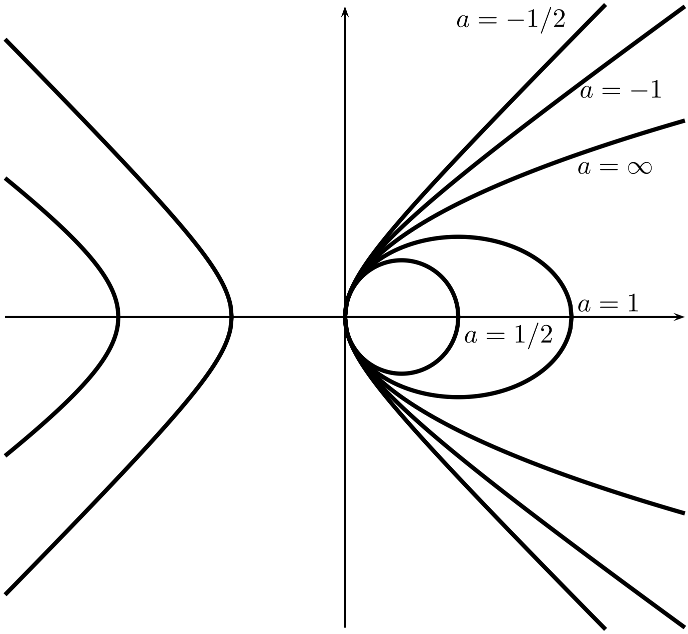
Apollonius denklemi, ekseni x ekseni olan ve köşesi başlangıç noktası olan

- $a < 0$ durumunda hiperbolü,
- $a = \infty$ durumunda parabolü,
- $a > 0$ durumunda elipsi

tanımlar. Şekil 19'a bakın.

Söz 100*.* $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ (ve $a \neq \infty$) olsun, ve

$$b > 0, \qquad\qquad 2b^2 = \ell a$$



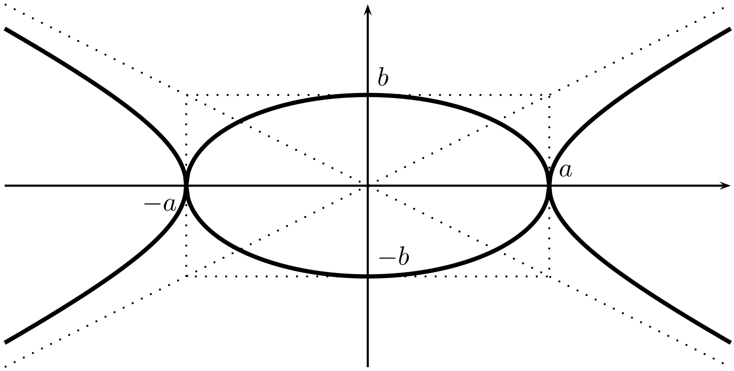
Şekil 19: $y^2 = x - x^2/2a$ koni kesitleri

olsun. O zaman dikey kenarı ℓ olan, yanlamasına kenarı $2|a|$ olan merkezli koni kesitlerinin merkez denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Şekil 20'ye bakın.

Tanım 101. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ denklemi, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolün **asimptotlarını** tanımlar. Yani hiperbolün asimptotları, $y = \pm(b/a)x$ doğrularıdır.



Şekil 20: $x^2/4 \pm y^2 = 1$ koni kesitleri

Teorem 102. *$y^2 = \ell x + (\ell/2a)x^2$ hiperbolün asimptotlarının denklemi*

$$y = \pm\sqrt{\frac{\ell}{2a}} \cdot (x - a).$$

Tanım 103. Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün **odak noktası**

$$\left(\frac{\ell}{4}, 0\right)$$

ve **doğrultman doğrusu**

$$x + \frac{\ell}{4} = 0.$$

Teorem 104. *Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün noktaları, odak noktasına ve doğrultmana uzaklığı aynı olan noktalardır.*

Tanım 105. Denklemi $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ olan hiperbolün **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0),$$

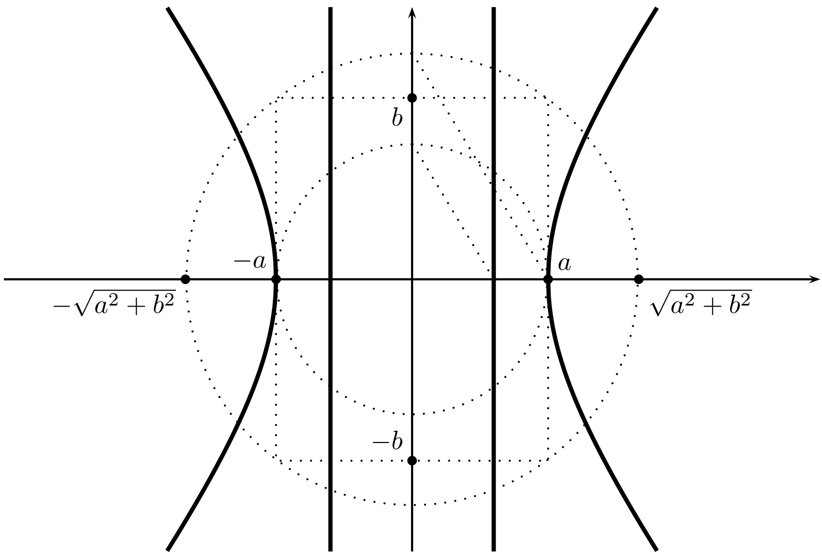
(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Şekil 21'e bakın. Ayrıca $0 < b < a$ ise denklemi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ olan



Şekil 21: Hiperbolün odakları ve doğrultmanları

elipsin **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0),$$

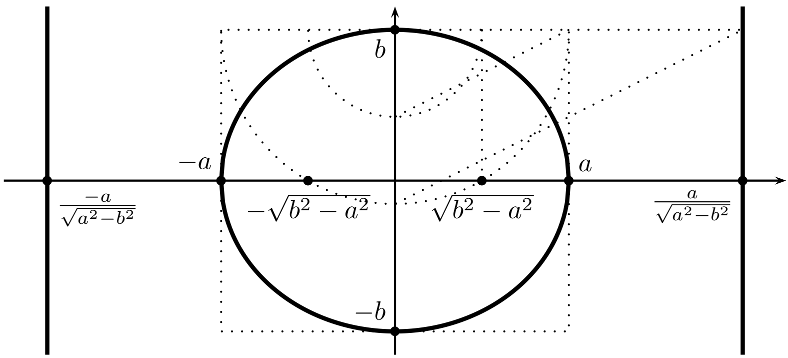
(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Şekil 22'ye bakın.



Şekil 22: Elipsin odakları ve doğrultmanları

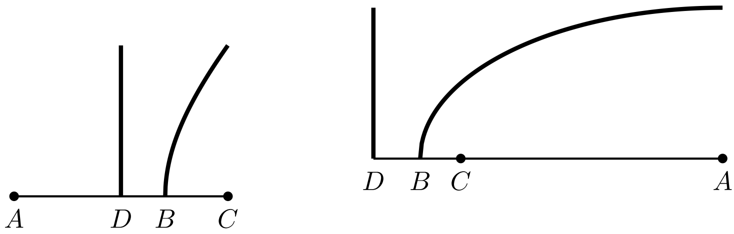
Söz 106. Şekil 23'teki gibi merkezli koni kesitinin merkezi A, ve (merkezin aynı tarafında olan) köşesi B, ve odağı C ise, ve doğrultmanı, koni kesitinin eksenini D noktasında keserse, tanıma göre koni kesitinin dışmerkezliliği $AC : AB$, ama

$$AC : AB :: AB : AD,$$

dolayısıyla

$$BC : BD :: AC : AB,$$

ve sonuç olarak koni kesitinin dışmerkezliliği $BC : BD$.



Şekil 23: Odak ve doğrultman

Teorem 107. *Merkezli koni kesitinin noktaları, bir odak noktasına ve ona karşılık gelen doğrultman doğrusuna uzaklıklarının oranının dışmerkezlilik olduğu noktalardır. Yani Şekil 24'te ($CB = C'B'$ ve $BD = B'D'$ olduğundan) aşağıdaki koşullar denktir:*

- *E noktası koni kesitinde,*
- *$CE : EF :: CB : BD$,*
- *$C'E : EF' :: CB : BD$.*

Söz 108. $BC : BD :: AB : AD :: BB' : DD'$ olduğundan merkezli koni kesitinin E noktaları için (ve sadece bu noktalar için)

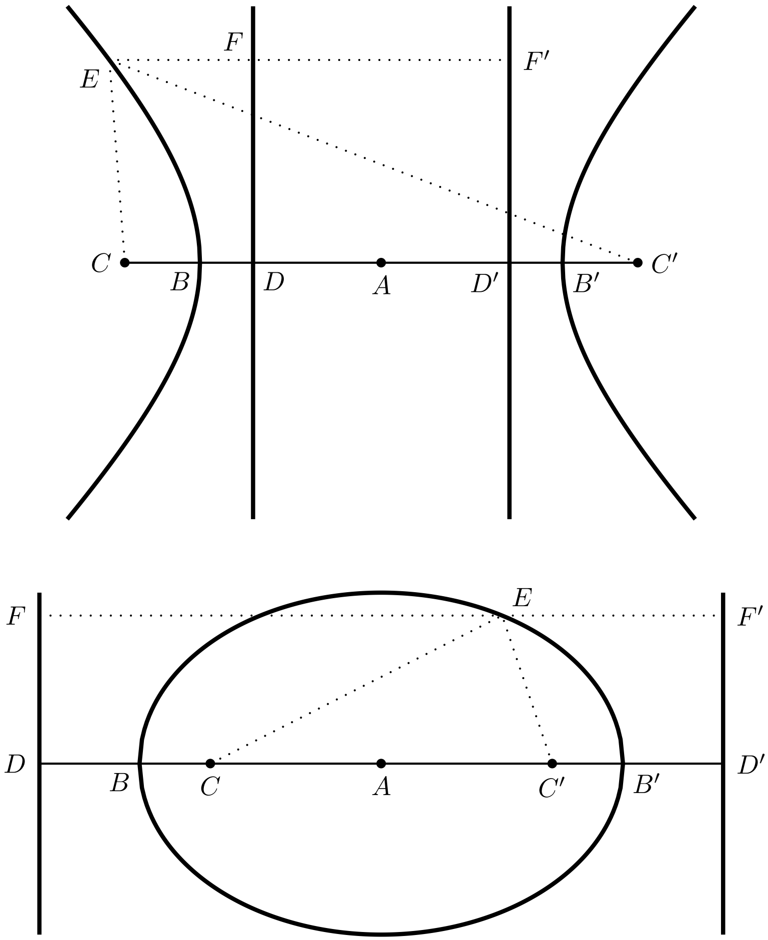
$$C'E \pm CE : EF' \pm EF :: BB' : DD'.$$

Elipste $EF' + EF = FF' = DD'$, dolayısıyla

$$CE + C'E = BB'.$$

Hiperbolde E, soldaki daldaysa $EF' - EF = DD'$, dolayısıyla

$$C'E - CE = BB'.$$



Şekil 24: Dışmerkezlilik