Analitik Geometri Özeti

Analytic Geometry Summary
with English foreward

David Pierce

14 Mayıs 2015
Gözden geçirilmiş 8 Nisan 2016

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İngilizce önsöz

These notes are a summary of a course in analytic geometry given to first-year students in the mathematics department of Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, in the second—the spring—semester of 2014–5.

The notes are divided into paragraphs, which are numbered serially. Each paragraph is further labelled as a definition, a remark, or a theorem. A few theorems are given explicit proofs. Most proofs are omitted. These proofs may have been given in class, or they may have been left as exercises. Other exercises were given in class, but these are not included here.

The course aims to avoid two failings of contemporary presentations of analytic geometry: (1) the logical foundations of the subject are not clear, and (2) conic sections are not explained as such. The first is a failure of honesty: honesty to our students and ourselves about what we assume, and what we can actually prove. The second is a failure to share the liberating power of mathematics, replacing it with rote memorization. If students are going to learn the parabola, hyperbola, and ellipse, they ought to know what the names really mean.

Foundations

When Descartes invented analytic geometry, he had Ancient Greek mathematics as a foundation. He did *not* draw two perpendicular lines in a plane and use them to establish a one-to-one correspondence between points in the plane and ordered pairs of numbers. He *did* introduce the practice, which we follow today, of naming lengths by minuscule Latin letters: known lengths from the beginning of the alphabet, and unknown lengths from the end. By introducing a unit length, Descartes showed that lengths could be manipulated algebraically—they could be added and multiplied—with full geometric justification.

Students today will come to a course in analytic geometry with some knowledge of the ordered field of real numbers. They can conceive this ordered field as an unbounded straight line. An analytic geometry textbook will use pairs of real numbers to coordinatize a plane in the manner referred to above. Then the book will give a rule for expressing the distance between two points of the plane so coordinatized. The rule will be justified by a vague reference to the Pythagorean Theorem.

This justification is inadequate, if what is meant by the Pythagorean Theorem is Proposition 47 of Book I of Euclid's *Elements.* This proposition is that the square on the hypotenuse of a right triangle is equal to the squares on the two legs. This means the two small squares can be cut into pieces and rearranged to form the large square. This process has no obvious connection to adding the so-called "squares" of two real numbers. We can make the connection in two ways.

1. We can develop the set of ordered pairs of real numbers into an inner product space. Here we *define* the notions of length and angle, and we prove that they have the

properties that we want.

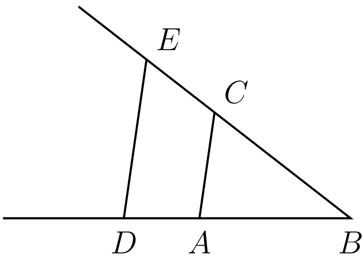
2. Alternatively, we can use geometry to give an infinite straight line the structure of an ordered field.

Following Descartes, we take the latter approach in the present course. The students have already had a course in which they themselves demonstrate, at the board, the contents of Book I of Euclid's *Elements.* That book then is the logical foundation of the notes below.

We need a theory of proportion, so that, after choosing a unit length, we can define the product $a \cdot b$ of two lengths by

$$1 : b :: a : a \cdot b.$$

Descartes presumably relies on the theory developed in Books V and VI of the *Elements.* By this theory, in the figure, as-



suming $DE \parallel AC$, then

$$BA : BD :: BC : BE. \tag{$*$}$$

In particular, if $AB = 1$, $BC = a$, and $BD = b$, then we define $BE = a \cdot b$.

Euclid's theory of proportion relies on the so-called Archimedean Axiom: that of any two lengths, some multiple of either exceeds the other. (Moreover, some multiple of the *difference* of the lengths exceeds the greater.) David Hilbert develops a theory of proportion without using this axiom. First he defines multiplication as Descartes does; but he must assume that angle ABC is right. He proves commutativity and associativity of multiplication by means of what he calls Pascal's Theorem, though it was known to Pappus of Alexandria. Then he defines

$$a : b :: c : d \iff ad = bc. \tag{$\dagger$}$$

I have preferred to proceed more historically, though without using the Archimedean Axiom. I make $(*)$ the definition of proportion, assuming angle ABC in the figure is right. It takes some work to show that the same proportion holds, regardless of the angle. Instead of Pascal's or Pappus's Theorem, our main tool is Proposition I.43 of the *Elements* and its converse (here incorporated into Theorem 23 below). This gives us $(\dagger)$, but on the understanding that the product of two lengths is an *area.* The product of three lengths is likewise a *volume.* Ultimately, by defining a unit length like Descartes, we can represent areas and volumes by lengths; but there seems to be no need to do this until we do coordinatize the plane, and we want to use an equation like

$$y = mx + b$$

to define a straight line. (Even then, without defining a unit, we could say m is a ratio, not a length.)

We make explicit that a *length* is a congruence-class of line segments. For Euclid, our line segments are straight lines, and congruence of them is equality. In general, the measure of a magnitude can be understood as its equality-class. We do not follow Archimedes in assuming that the circumference of a circle has a ratio to its diameter. For us, π is just the double of the measure of a right angle.

Conic sections

Many textbooks today *tell* you that the parabola, hyperbola, and ellipse can be obtained by cutting a right cone with a plane. But they *define* each of these curves by means of an equation, or else they derive the equation from a focus and directrix, and they usually do not bother to show you that the property expressed by the equation can actually be *proved* for the appropriate conic section. Hilbert and Cohn-Vossen prove it beautifully, but using *right* cones only. Apollonius proves it for arbitrary cones, and I take his approach here. I look at the conic sections as soon as possible, because they are beautiful in themselves, and because they show the power of analytic geometry to encode beauty in equations. My approach then asks the student to think in three dimensions near the beginning of the course. But there is reason for it: to see how a third dimension illuminates two.

İçindekiler

1 Orantılar 11
- 1.1 Denklik bağıntıları 11
- 1.2 Uzunluklar 13
- 1.3 Alanlar 16

2 Koni kesitleri 20
- 2.1 Paraboller 20
- 2.2 Hacimler 24
- 2.3 Hiperboller 24
- 2.4 İşaretli uzunluklar ve elipsler 26

3 Eksenler 30
- 3.1 Eksenler 30
- 3.2 Dik eksenler 33
- 3.3 Uzaklık 35
- 3.4 Dik eksenlere göre koni kesitleri 39
- 3.5 Kutupsal koordinatlar 46
- 3.6 Uzay 55
- 3.7 Vektörler 57

Kaynakça 62

Şekil Listesi

1 Bir bağıntı . . . 14
2 Orantılılık . . . 15
3 Paralellik ve orantılılık . . . 15
4 Toplama . . . 16
5 Orta orantılı . . . 16
6 Dikdörtgenlerin eşitliği . . . 17
7 Paralellik ve orantılılık . . . 19

8 Koninin eksen üçgeni ve tabanı . . . 21
9 Bir koni kesiti . . . 21
10 Koninin eksen üçgeni ve tabanları . . . 22
11 İki orta orantılı . . . 23
12 Konide hiperbol . . . 25
13 $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü . . . 26
14 $2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$ elipsi . . . 29

15 Koordinatlar . . . 31
16 İkinci dalı ile $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü . . . 32
17 Parabolün yeni çapı . . . 33
18 Hiperbolün yeni çapı . . . 35
19 Hiperbolün benzer üçgenleri . . . 36
20 Kosinüs tanımı . . . 38
21 Kosinüs Teoremi . . . 39
22 $y^2 = x - x^2/2a$ koni kesitleri . . . 41
23 $x^2/4 \pm y^2 = 1$ koni kesitleri . . . 42

24 Hiperbolün odakları ve doğrultmanları 43
25 Elipsin odakları ve doğrultmanları 44
26 Odak ve doğrultman 44
27 Hiperbolün dışmerkezlilik 45
28 Elipsin dışmerkezlilik 45
29 Trigonometri (üçgen ölçmesi) 46
30 Açıların ölçüsü 47
31 Koni kesitinin kutupsal denklemi 48
32 Dışmerkezliğe göre koni kesitleri 49
33 Çemberler ve doğru 49
34 4-yapraklı gül 51
35 3-yapraklı gül 52
36 8- ve 5-yapraklı güller 53
37 Güller 53
38 Limasonlar 54
39 Lemniskat 55

1 Orantılar

1.1 Denklik bağıntıları

Tanım 1. Doğal sayılar, 1, 2, 3, ... Bunlar $\mathbb{N}$ kümesini oluşturur:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(Bu ifadede "=" işareti *aynılığı* gösterir, yani $\mathbb{N}$ ve $\{1, 2, 3, \dots\}$ aynı kümedir.)

Söz 2. İlkokuldan bildiğimiz gibi iki doğal sayı toplanabilir ve çarpılabilir, ve doğal sayılar sıralanır.

Tanım 3. Sıralı ikililer,

$$(a, b) = (x, y) \iff a = x \ \& \ b = y$$

özelliğini sağlar. Tüm A ve B kümeleri için

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

Tanım 4. Bir A kümesinin yansımalı, simetrik, ve geçişli 2-konumlu R bağıntısı, A kümesinin **denklik bağıntısıdır.** A kümesinin b elemanının R **bağıntısına göre denklik sınıfı** veya **R-sınıfı,**

$$\{x \in A \colon x \mathrel{R} b\}$$

kümesidir.[1] Bu denklik sınıfı için

$$[b]$$

kısaltması kullanılabilir (ama Teorem 5'ten sonra kullanılmayacak).

Teorem 5. *R, A kümesinin denklik bağıntısı olsun, ve $b \in A$, $c \in A$ olsun. O zaman*

$$[b] = [c] \qquad \textit{veya} \qquad [b] \cap [c] = \varnothing.$$

Tanım 6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\approx$ bağıntısı,

$$(k, \ell) \approx (x, y) \iff ky = \ell x$$

tanımını sağlasın.

Teorem 7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *kümesinin* $\approx$ *bağıntısı, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin (k, ℓ) elemanının $\approx$-sınıfı,

$$\frac{k}{\ell}$$

veya k/ℓ **pozitif kesirli sayısıdır.** Pozitif kesirli sayılar,

$$\mathbb{Q}^+$$

kümesini oluşturur.

[1] Bu kümeye "denklik sınıfı" demek, bir gelenektir. Kümeler kuramında her küme bir sınıftır, ama her sınıf küme değildir. Örneğin $\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, küme olamaz.

Teorem 9. *Aşağıdaki eşitlikler, $\mathbb{Q}^+$ kümesinin toplama ve çarpma işlemleri için iyi tanımdır:*

$$\frac{k}{\ell}+\frac{m}{n}=\frac{kn+\ell m}{\ell n}, \qquad \frac{k}{\ell}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{\ell n}.$$

Yani

$$\frac{k}{\ell}=\frac{k'}{\ell'} \;\&\; \frac{m}{n}=\frac{m'}{n'} \implies \frac{kn+\ell m}{\ell n}=\frac{k'n'+\ell'm'}{\ell'n'} \;\&\; \frac{km}{\ell n}=\frac{k'm'}{\ell'n'}.$$

Ayrıca $\mathbb{Q}^+$ aşağıdaki tanıma göre sıralanır:

$$\frac{k}{\ell}<\frac{m}{n} \iff kn<\ell m.$$

1.2 Uzunluklar

Tanım 10. Öklid'deki gibi, normalde bir **doğrunun** uç noktaları vardır. Öklid'in 4. Ortak Kavramındaki gibi çakışan doğrular **eşittir.** (Özel olarak doğrular için eşitlik aynılık değildir.)

Teorem 11. *Doğruların eşitliği, bir denklik bağıntısıdır.*

Kanıt. Öklid'in 1. Ortak Kavramına göre eşitlik geçişlidir. Çakışmanın yansımalılığı ve simetrisi, açık olarak sayılabilir. □

Tanım 12. Bir doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğudur.** Küçük a, b, c, ... Latin harfleri uzunluk gösterecek. Eğer bir AB doğrusunun uzunluğu c ise

$$AB=c$$

ifadesini yazarız.[2]

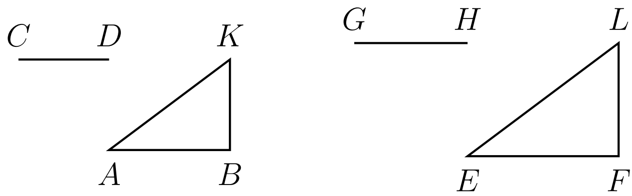
[2] Bu uygulama Descartes'ın 1637 *Geometri* kitabından gelir.

Teorem 13. *İki uzunluk toplanabilir, ve bir kesirli sayı bir uzunluğu çoğaltabilir. Toplama değişmeli ve birleşmelidir, ve çoğaltma toplama üzerine dağılır. Eğer $a < b$ ise*

$$a + x = b$$

denklemi çözülebilir.

Tanım 14. $\mathscr{R}$, aşağıdaki gibi tanımlanan bağıntı olsun. AB, CD, EF, ve GH doğruları verilmiş olsun. Bazı K ve L noktaları için, eğer $CD = BK$ ve $GH = FL$ ise, ve Şekil 1'deki gibi ABK ve EFL üçgenlerinde $\angle ABK$ ve $\angle EFL$ dik ve



Şekil 1: Bir bağıntı

$\angle BAK = \angle FEL$ ise, o zaman

$$(AB, CD) \mathscr{R} (EF, GH)$$

olsun.

Teorem 15. *$\mathscr{R}$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $\mathscr{R}$ sadece doğruların uzunluğuna bağlıdır.*

Tanım 16. Eğer Teorem 15'teki gibi $(AB, CD) \mathscr{R} (EF, GH)$ ise AB, CD, EF, ve GH doğruları **orantılıdır,** ve

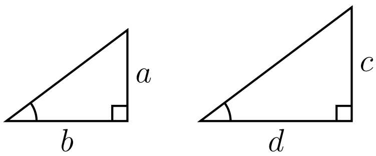
$$AB : CD :: EF : GH$$

orantısını yazarız; ayrıca $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, ve $GH = d$ ise

$$a : b :: c : d$$

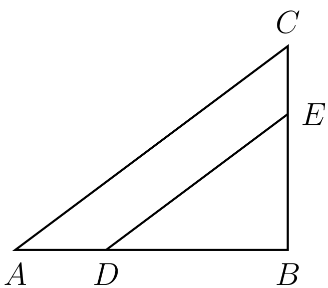
ifadesini yazarız. Buradaki $AB : CD$ ve $a : b$ ifadeleri, (AB, CD) ve (a, b) sıralı ikililerinin denklik sınıfını gösterir; bu sınıf, bir **orandır.** Bu durumda "::" simgesi, oranların *aynılığını* gösterir. (Bundan sonra $\mathscr{R}$ kullanılmayacak.)

Söz 17. Şimdi $a : b :: c : d$ orantısı, Şekil 2'deki gibi gösterilebilir.



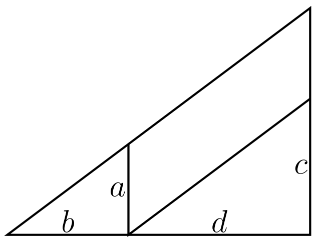
Şekil 2: Orantılılık

Teorem 18. *Şekil 3'te ABC açısı dik ise*

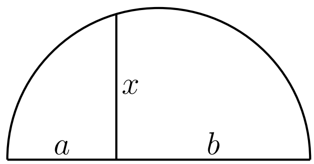


Şekil 3: Paralellik ve orantılılık

$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$



Şekil 4: Toplama



Şekil 5: Orta orantılı

Teorem 19. *$a : b :: a : c \implies b = c$.*

Teorem 20. *$a : b :: c : d \implies a : b :: a \pm c : b \pm d$. (Şekil 4'e bakın.)*

Tanım 21. $a : c :: c : b$ ise c uzunluğuna a ve b uzunluklarının **orta orantılısı** denir.

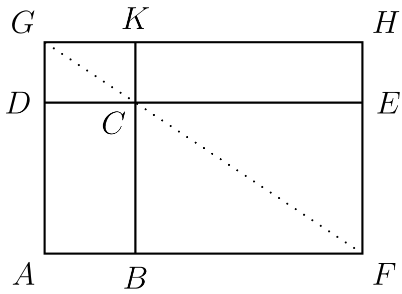
Teorem 22. *Her iki uzunluğun orta orantılısı vardır, yani her*

$$a : x :: x : b$$

orantısı çözülebilir. (Şekil 5'e bakın.)

1.3 Alanlar

Teorem 23. *Aynı genişliği ve yüksekliği olan dikdörtgenler eşittir. Şekil 6'da $ABCD$ ve $CEHK$ dikdörtgenleri eşittir an-*



Şekil 6: Dikdörtgenlerin eşitliği

cak ve ancak GC ve CF bir doğrudadır.

Tanım 24. Bir dikdörtgenin **alanı,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a ve yüksekliği b olan dikdörtgenin alanı

$$a \cdot b$$

veya ab ile gösterilir. Ayrıca $a \cdot a$ alanı

$$a^2$$

ile gösterilir.

Teorem 25. *Uzunlukların çarpması değişmelidir ve toplama üzerine dağılır. Ayrıca*

$$ab = ac \implies b = c.$$

Teorem 26. $a : b :: c : d \iff ad = bc.$

Teorem 27. $a : b :: c : d \implies a : c :: b : d.$

Teorem 28. $ab = de \;\&\; ac = df \implies b : c :: e : f.$

Teorem 29. $a : b :: d : e \;\&\; b : c :: e : f \implies a : c :: d : f.$

Tanım 30. $c : d :: b : e$ ise

$$(a : b) \,\&\, (c : d) :: a : e,$$

ve $a : e$ oranı, $a : b$ ve $c : d$ oranlarının **bileşkesidir.**

Teorem 31. *$a : b :: c : d$ ve $e : f :: g : h$ ise*

$$(a : b) \,\&\, (e : f) :: (c : d) \,\&\, (g : h).$$

Teorem 32. $(a : b) \,\&\, (c : d) :: ac : bd.$

Teorem 33. $(a : b) \,\&\, (c : d) :: (c : d) \,\&\, (a : b).$

Teorem 34. *Her $ab = cx$ denklemi çözülebilir.*

Tanım 35. $a : b :: c : d$ ise d uzunluğuna a, b, ve c uzunluklarının **dördüncü orantılısı** denir.

Teorem 36. *Her üç uzunluğun dördüncü orantılısı vardır, yani her*

$$a : b :: c : x$$

orantısı çözülebilir.

Tanım 37. ab ve cd alanları verilmiş ise Teorem 34'e göre bir e için $cd = ae$. Bu durumda, tanıma göre

$$ab : cd :: a : e.$$

Teorem 28 sayesinde bu tanım iyidir, yani $ab = fg$ ve $cd = hk$ ise $ab : cd :: fg : hk$.

Teorem 38. $ab : cd :: ab : ef \implies cd = ef.$

Teorem 39. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : ef :: cd : gh.$

Teorem 40. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : cd :: ab + ef : cd + gh.$

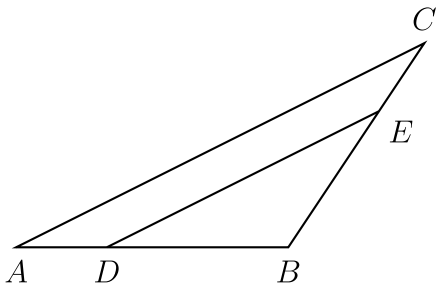
Teorem 41. $a : b :: c : d \iff a^2 : b^2 :: c^2 : d^2.$

Tanım 42. Açıları sırasıyla eşit olan üçgenler **benzerdir.**

Teorem 43. *Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır, yani ABC ve DEF benzer ise*

$$AB : BC :: DE : EF.$$

Teorem 44. *Şekil 7'de ABC herhangi üçgen olsun. O zaman*



Şekil 7: Paralellik ve orantılılık

$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$

2 Koni kesitleri

2.1 Paraboller

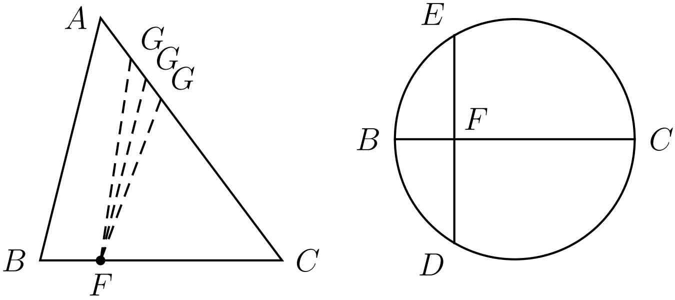
Tanım 45. Bir daire ve aynı düzlemde olmayan bir nokta, bir **koniyi** ($\kappa\tilde{\omega}\nu o\varsigma$ "çam kozalağı") belirtir. Daire, koninin **tabanıdır,** ve nokta, koninin **tepe noktasıdır.** Koninin **yüzeyi,** tepe noktasından tabanın sınırına giden doğrular tarafından oluşturulur. Koninin tepe noktasından tabanın merkezine giden doğru, koninin **eksenidir** ($\check{\alpha}\xi\omega\nu$ "dingil"). Bu eksen, koninin tabanına dik ise, koninin kendisi **diktir.** Her koni için, ekseni içeren her düzlem, koniyi bir üçgende keser. Bu üçgene **eksen üçgeni** denebilir.

Söz 46. Bir koni dik olmayabilir. Koninin eksen üçgeninin tabanı, koninin tabanının bir çapıdır.

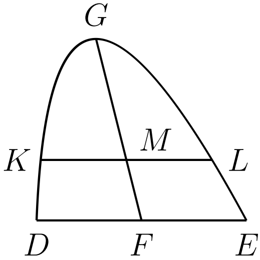
Teorem 47. *Bir koninin bir eksen üçgeni, Şekil 8'deki gibi tabanı BC olan ABC üçgeni olsun. Koninin tabanının DE kirişi çizilsin, ve bu kiriş, BC çapına dik olsun. O zaman kiriş, çap tarafından bir F noktasında ikiye bölünür, ve*

$$DF^2 = BF \cdot FC. \tag{$*$}$$

Tanım 48. Teorem 47 durumunda DE kirişini içeren bir düzlem, eksen üçgeninin AC kenarını bir G noktasında kessin. O zaman bu düzlem, koninin yüzeyini Şekil 9'daki gibi bir DGE eğrisinde keser. Bu eğriye **koni kesiti** denir. DE doğrusu, eğrinin bir kirişidir.



Şekil 8: Koninin eksen üçgeni ve tabanı

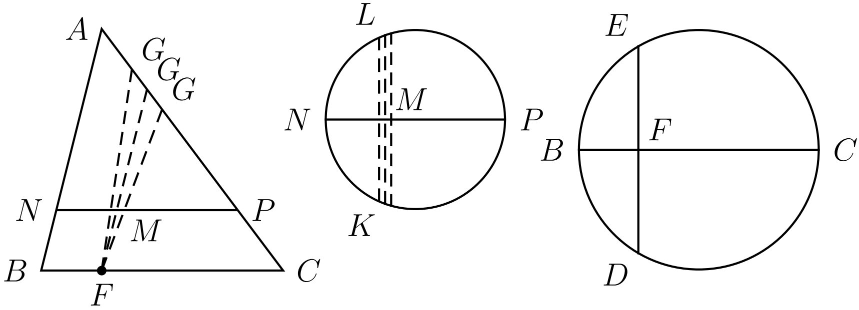


Şekil 9: Bir koni kesiti

Teorem 49. *KL doğrusu, yukarıdaki koni kesitinin başka bir kirişi olsun, ve bu kiriş, DE kirişine paralel olsun. KL kirişi ve FG doğrusu bir M noktasında kesişir. Ayrıca koninin tabanına paralel olan ve KL kirişini içeren bir düzlem vardır. Bu düzlem,*

- *ABC üçgenini BC tabanına paralel olan bir NP doğrusunda keser, ve*
- *koninin kendisini, çapı NP olan bir dairede keser.*

Şekil 10'a bakın. Koni kesitinin LK kirişi, bu yeni dairenin kirişidir, ve dairenin NP çapına diktir, dolayısıyla $KM = ML$. Bu şekilde GF ışını, DGE koni kesitinin DE kirişine paralel olan her kirişi ikiye böler.



Şekil 10: Koninin eksen üçgeni ve tabanları

Tanım 50. Tanım 48 ve Teorem 49'da G noktası, koni kesitinin **köşesidir,** ve GF ışını koni kesitinin bir **çapıdır,** çünkü DE kirişine paralel olan kirişleri ikiye böler. Eğer çap, ikiye böldüğü ve birbirine paralel olan kirişlere dik ise, ona **eksen** denir. Ama her durumda DE kirişinin DF (veya EF) yarısına **ordinat** denir, ve çapın GF parçasına, DF ordinatına karşılık gelen **absis** denir.

Söz 51. O zaman KM ve LM doğruları da ordinattır, ve onlara karşılık gelen absis, GM doğrusudur.

Teorem 52. *Şekil 10'daki durumda $FG \parallel BA$ olsun. O zaman*

$$GM : GF :: ML^2 : FE^2.$$

Sonuç olarak bir ℓ uzunluğu için, koni kesitinin herhangi ordinatının uzunluğu y ve ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu x ise

$$y^2 = \ell x.$$

Ayrıca

$$\ell : GA :: CB^2 :: CA \cdot CB.$$

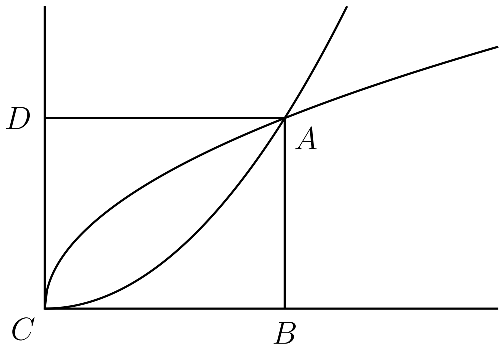
Tanım 53. Teorem 52'deki koni kesiti **paraboldür** ($\pi\alpha\rho\alpha$-$\beta o\lambda\acute{\eta}$ "uygulama, yerleştirme"), ve ℓ, parabolün **parametresidir** ve parabolün **dikey kenarının** uzunluğudur.[1]

Tanım 54. $a : c :: c : d$ ve $c : d :: d : b$ ise c ve d uzunluklarına a ve b uzunluklarının **iki orta orantılısı** denir.

Teorem 55 (Menaechmus)**.** *Parametreleri a ve b olan paraboller ile a ve b uzunluklarının iki orta orantılısı bulunabilir. Aslında*

$$a : x :: x : y :: y : b$$

orantıları Şekil 11'deki gibi çözülebilir. Parametresi b olan pa-



Şekil 11: İki orta orantılı

rabolün bir ordinatı AB ve ona karşılık gelen absis CB ise, ve parametresi a olan parabolün bir ordinatı AD ve ona karşılık gelen absis CD ise, ve her parabolün ordinatları diğer parabolün çapına paralel ise, o zaman CB ve CD doğrularının uzunlukları yukarıdaki orantıları çözer.

[1]Dikey kenarın Latince'si, *latus rectum.*

Söz 56. Aristo hakkında yorumlarında Eutocius, iki orta orantılı probleminin birkaç tane çözümü verdi. Bunların biri, yukarıdaki Menaechmus'un çözümüydü. Aristo'nun ve Eutocius'un metinleri, Miletli İsidorus tarafından toplandı. İsidorus, Ayasofya'nın iki mimarından biriydi.

2.2 Hacimler

Tanım 57. Dik paralelyüzün **hacmi,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a, yüksekliği b, ve derinliği c olan dik paralelyüzün hacmi

$$a \cdot b \cdot c$$

veya abc ile gösterilir.

Teorem 58. *$abc = bac = bca$ ve $ab(c + d) = abc + abd$.*

Teorem 59. *$abc = ade \implies bc = de$.*

Teorem 60. *$ab : cd :: e : f \iff abf = cde$.*

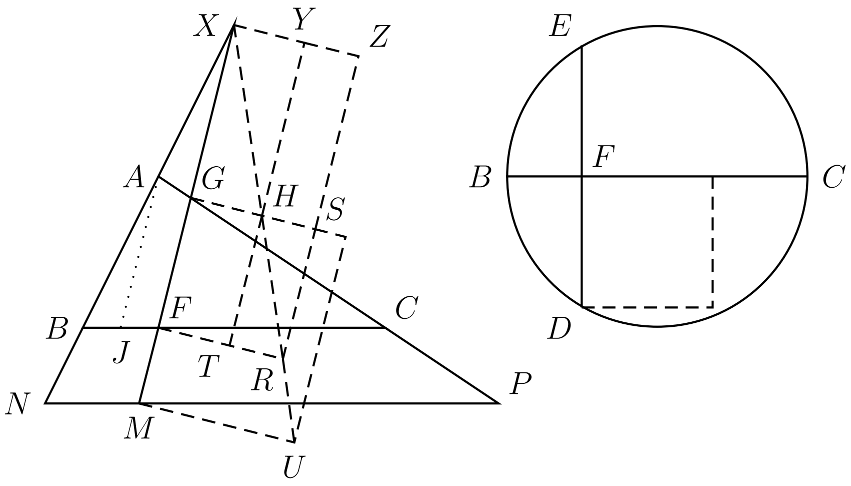
2.3 Hiperboller

Teorem 61. *Şekil 8'de koni kesitinin GF çapı G noktasının ötesine uzatılırsa, Şekil 12'deki gibi BA doğrusunun uzatılmasını bir X noktasında kessin. FR doğrusu, GF çapına dik olsun ve*

$$FR \cdot FG = DF^2 \tag{†}$$

eşitliğini sağlasın. $MU \parallel FR$ olsun, ve (gerekirse uzatılmış) XR ve MU, U noktasında kesişsin. O zaman

$$GM \cdot MU = KM^2.$$



Şekil 12: Konide hiperbol

(KM, Şekil 10'daki gibidir.) $AJ \parallel XF$ *olsun; o zaman*

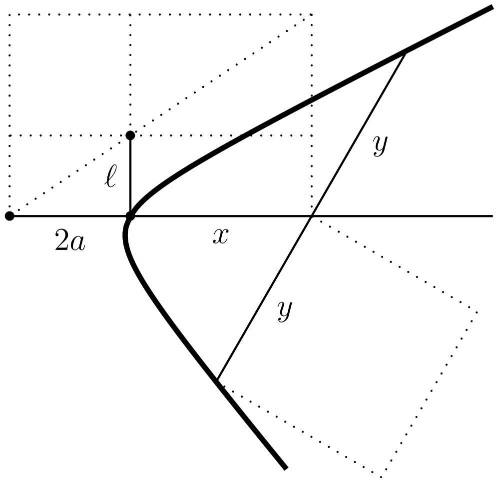
$$GH : GX :: BJ \cdot JC : AJ^2.$$

GH doğrusunun uzunluğu ℓ *olsun, ve* GX *doğrusunun uzunluğu* $2a$ *olsun. Koni kesitinin herhangi bir ordinatının uzunluğu* y *ve bu ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu* x *ise*

$$2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2.$$

Söz 62. Şekil 13'e bakın; buradaki ℓ-işaretli doğru, koni kesitinin düzlemine dik olarak düşünülebilir.

Tanım 63. Teorem 61'de alanı y^2 olan kare, alanı ℓx olan dikdörtgenini aştığından, koni kesitine **hiperbol** (ὑπερβολή "aşma") denir; GH doğrusu, hiperbolün **dikey kenarıdır;** dikey kenarın ℓ uzunluğu, hiperbolün **parametresidir;** GX



Şekil 13: $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

doğrusu, hiperbolün **yanlamasına kenarıdır;**[2] yanlamasına kenarın orta noktası, hiperbolün **merkezidir.**

Söz 64. Şekil 12'de FS ve FH dikdörtgenlerinin farkı TS dikdörtgendir, ve bu dikdörtgen GY dikdörtgenine benzerdir.[3]

2.4 İşaretli uzunluklar ve elipsler

Tanım 65. Bir yön ile donatılmış bir doğru, bir **yönlü doğrudur.** Eğer AB, A'dan B'ye yön ile donatılırsa, oluşan yönlü doğru

$$\overrightarrow{AB}$$

biçiminde yazılabilir. $\overrightarrow{AA}$, **yoz** veya **dejenere** yönlü doğrudur ve A noktası olarak anlaşılabilir. Eğer $ABDC$ ve $DCEF$

[2] πλάγια πλευρά; Latince'si *latus transversum.*
[3] Bu GY dikdörtgeni, hiperbolün **şeklidir** (εἶδος).

paralelkenar ise, o zaman

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF},$$

Özel olarak $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Teorem 66. *Doğruların paralelliği ve yönlü doğruların eşitliği, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 67. Yönlü doğrunun eşitlik sınıfı, **vektördür.**

Tanım 68. Her paralellik sınıfı için bir yön **pozitif,** diğer yön **negatif** olsun. O zaman her (yoz olmayan) yönlü doğru ya pozitif ya negatiftir. Bir yönlü doğrunun pozitifliği veya negatifliği, yönlü doğrunun **işaretidir.**

Teorem 69. *A, B, ve C bir doğruda olsun. O zaman $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yönlü doğrularının işaretleri aynıdır ancak ve ancak $AB < AC$ ve $BC < AC$.*

Teorem 70. *Aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathscr{S}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır: $\overrightarrow{AB} \mathrel{\mathscr{S}} \overrightarrow{CD}$ ancak ve ancak $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğrularının işaretleri aynı ve $AB = CD$.*

Tanım 71. Teorem 70'teki denklik bağıntısına göre bir yönlü doğrunun denklik sınıfı, **yönlü doğrunun uzunluğudur.**

Söz 72. Bir doğrunun uzunluğu, yeni tanımı alabilir: $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğrularının uzunluklarının hangisi pozitif ise, AB doğrusunun uzunluğu olarak alınabilir. Bu tanımı başlangıçtan kullanabildik.

Tanım 73. Küçük a, b, c, . . . Latin harfleri, yönlü doğrunun uzunluğunu (yani işaretli uzunluğunu) gösterecek. Yoz yönlü doğrunun uzunluğu,

$$0$$

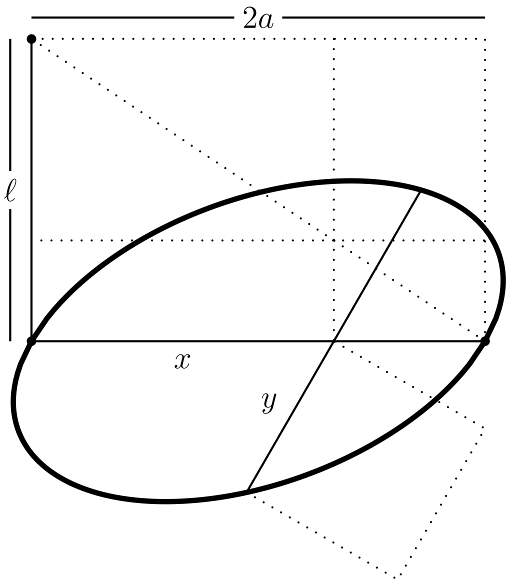
olsun, ve $\overrightarrow{AB} = c$ ise
$$-c = \overrightarrow{BA}$$
olsun.

Teorem 74. *İki işaretli uzunluk toplanabilir, ve tanıma göre A, B, ve C bir doğruda ve*
$$\overrightarrow{AB} = d, \qquad \overrightarrow{BC} = e, \qquad \overrightarrow{AC} = f$$
ise
$$d + e = f.$$
Bu durumda toplama değişmeli ve birleşmelidir; ayrıca
$$a + 0 = a,$$
$$a + (-a) = 0.$$

Tanım 75.
$$a - b = a + (-b),$$
$$-a \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b),$$
$$-a \cdot bc = a \cdot (-b) \cdot c = ab \cdot (-c) = -(abc).$$

Şimdi hiperbolün $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ denkleminde x ve y negatif olabilir. Ayrıca a negatif olabilir, ama bu durumda tanımlanan eğri hiperbol değildir:

Tanım 76. $\ell > 0$ ve $a > 0$ ise
$$2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$$
denklemi, **dikey kenarının** uzunluğu ℓ olan, **yanlamasına kenarının** uzunluğu $2a$ olan **elipsi** (ἔλλειψις "eksiklik") tanımlar (ama ordinatların çapa açısını seçilmeli). Şekil 14'e bakın. Hiperboldeki gibi elipsin **merkezi,** yanlamasına kenarının orta noktasıdır. Hiperbol ve elips, **merkezli koni kesitidir.**



Şekil 14: $2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$ elipsi

Teorem 77. *Teorem 61'de koni kesitinin GF çapı F noktasının ötesine uzatılırsa ve AB doğrusunun uzatılmasını keserse, hiperbolün yerine elips çıkar.*

Söz 78. Şimdi her koni kesiti ya parabol ya hiperbol ya da elipstir. Pergeli Apollonius bu adları vermiştir. Parabol olmayan her koni kesiti merkezlidir.

3 Eksenler

3.1 Eksenler

Tanım 79. Düzlemde iki doğru bir O noktasında kesişsin. Doğruların birine x **ekseni,** diğerine y **ekseni** densin, ve O noktasına **başlangıç noktası** densin.

Teorem 80. *Xy eksenleriyle donatılmış düzlemde her A noktası için x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, $ABOC$ paralelkenardır.*[1] *Tam tersine b ve c işaretli uzunluk olmak üzere, herhangi bir (b, c) sıralı ikilisi için, x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, düzlemde bir ve tek bir A için*

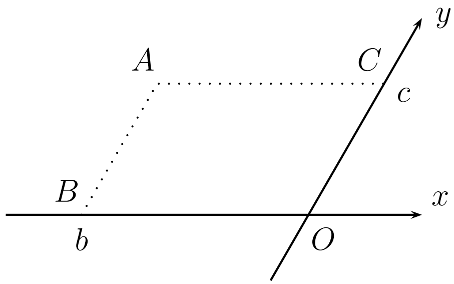
$$\overrightarrow{OB} = b, \qquad \overrightarrow{OC} = c,$$

ve $ABOC$ paralelkenardır.

Tanım 81. Teorem 80'de b, A noktasının x **koordinatıdır,** ve c, A noktasının y **koordinatıdır.** Şekil 15'teki gibi B noktasına b yazılabilir, ve C noktasına c yazılabilir.

Söz 82. Şekil 16'daki koordinatları (b, c) olan nokta hiperboldeyse, koordinatları $(b, -c)$, $(-2a - b, c)$, ve $(-2a - b, -c)$ olan noktaları da hiperboldedir.

[1] Eğer A zaten bir eksendeyse $ABOC$ paralelkenarı "dejenere" olacaktır. Örneğin A, x eksenindeyse B, A noktasıdır ve C, O noktasıdır.



Şekil 15: Koordinatlar

Teorem 83. *Denklemi* $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ *olan hiperbolü verilsin, ama yeni* st *eksenleri seçilsin. Eğer*

- s *ekseni,* x *eksenidir, ve*
- t *ekseni, hiperbolün merkezinden geçer ve* y *eksenine paralel ise,*

o zaman yeni st *eksenlerine göre hiperbolün denklemi,*

$$2at^2 = \ell s^2 - \ell a^2.$$

Teorem 84. *İşaretli uzunlukların oranı*

$$a : b :: c : d \iff ad = bc$$

kuralına göre tanımlanabilir. Oranların toplamı

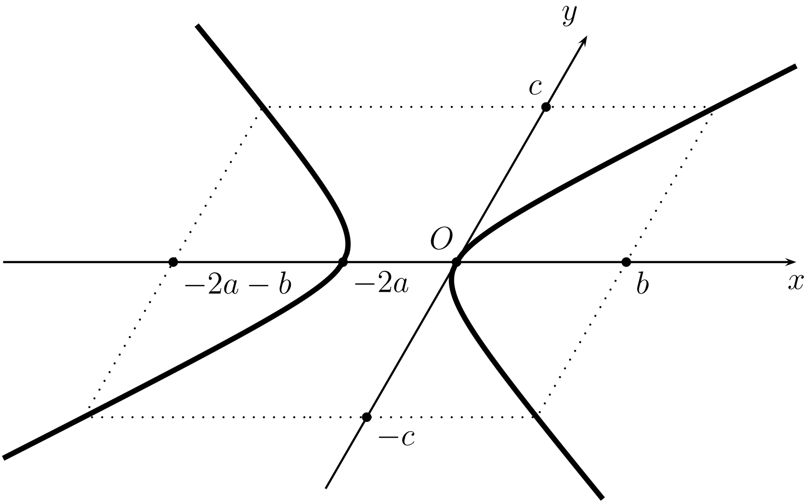
$$(a : c) + (b : c) :: (a + b) : c$$

kuralına göre tanımlanabilir.

Söz 85. Şimdi oranları sayılar gibi kullanabiliriz.

Tanım 86. $a : a$ oranı

1



Şekil 16: İkinci dalı ile $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

olarak yazılsın, ve $a : b$ oranı

$$\frac{a}{b}$$

veya a/b biçiminde yazılsın. O zaman hiperbolün

$$2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$$

denklemi

$$y^2 = \ell x + \frac{\ell}{2a}x^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **Apollonius denklemi** diyelim. Teorem 84'e göre, farklı eksenlere göre, hiperbolün

$$2ay^2 = \ell x^2 - \ell a^2$$

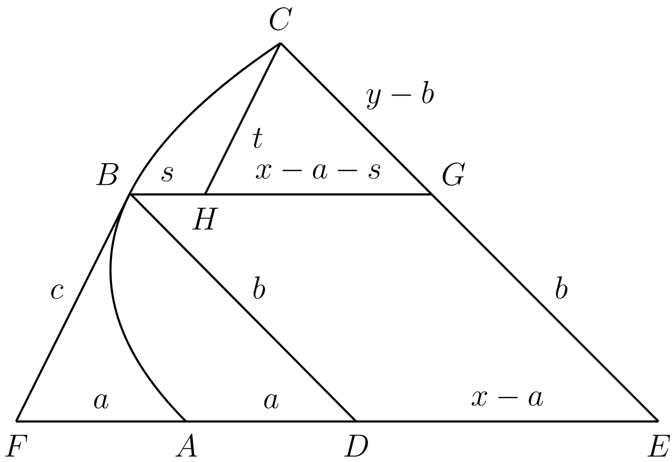
denklemi de vardır; bu denklem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\ell a/2} = 1$$

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **merkez denklemi** diyelim.

3.2 Dik eksenler

Teorem 87. *Parabolde çapa paralel olan her doğru, yeni bir çaptır. Şekil 17'deki gibi*



Şekil 17: Parabolün yeni çapı

1) ABC eğrisi, çapı FE ve köşesi A olan parabol,
2) BD ve CE ordinat,
3) $FA = AD$, *ve*
4) $BG \parallel FE$, $CH \parallel BF$

olsun. Aşağıdaki işaretli uzunlukları tanımlansın:

$$\overrightarrow{AD} = a, \quad \overrightarrow{AE} = x, \quad \overrightarrow{BH} = s, \quad \overrightarrow{DB} = b, \quad \overrightarrow{EC} = y, \quad \overrightarrow{HC} = t, \quad \overrightarrow{FB} = c.$$

Parabolün dikey kenarının uzunluğu ℓ ise

$$\frac{m}{\ell} = \frac{c^2}{b^2}$$

olsun. O zaman

$$y^2 = \ell x$$

olduğundan

$$t^2 = ms.$$

Teorem 88. *Parabolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir (yani Tanım 45'teki gibi parabolün ekseni ve tek bir ekseni vardır).*

Teorem 89. *Hiperbolün merkezinden geçen ve hiperbolü kesen her doğru, hiperbolün yeni bir çapıdır. Şekil 18'deki gibi*

1) *ABC eğrisi, merkezi D olan ve çapı DF olan hiperbol,*
2) *BE ve CF ordinat,*
3) *$DG : DA :: DA : DE$,*
4) *$CH \parallel BG$, $HK \parallel DA$, $HL \parallel BE$*

olsun. Aşağıdaki işaretli uzunluklar tanımlansın:

$$\overrightarrow{DF} = x, \quad \overrightarrow{DH} = s, \quad \overrightarrow{DE} = c, \quad \overrightarrow{DA} = a, \quad \overrightarrow{DB} = f,$$
$$\overrightarrow{FC} = y, \quad \overrightarrow{HC} = t, \quad \overrightarrow{EB} = d, \quad \overrightarrow{GE} = e, \quad \overrightarrow{GB} = g.$$

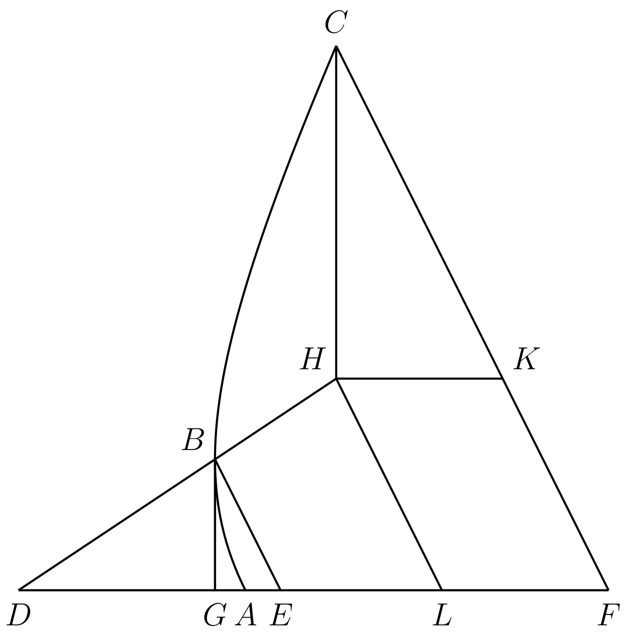
(Şekil 19'a bakın.) Hiperbolün dikey kenarının uzunluğu ℓ ve $2b^2 = \ell a$ ise

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olduğundan

$$\frac{s^2}{f^2} - \frac{t^2}{g^2c/e} = 1.$$

Teorem 90. *Hiperbolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir, yani hiperbolün bir (ve tek bir) ekseni vardır.*



Şekil 18: Hiperbolün yeni çapı

3.3 Uzaklık

Söz 91. Dik üçgenle $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin çözümü bulunabilir.

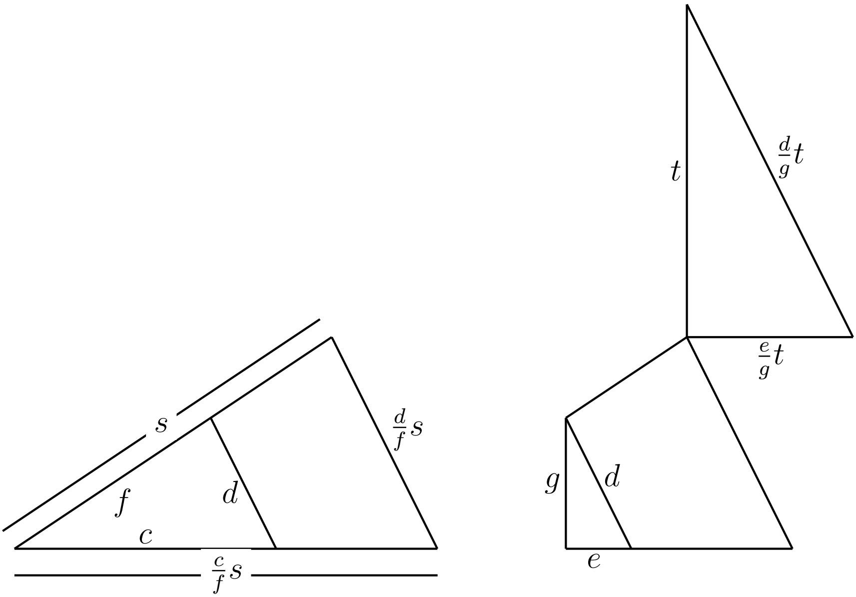
Tanım 92. $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin (pozitif) çözümü

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tanım 93. Eksenler verilirse, "koordinatları (a, b) olan nokta" ifadesinin yerine "(a, b) noktası" diyebiliriz.

Teorem 94. *Eksenler dik ise (a, b) noktasının (c, d) noktasından uzaklığı*

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$



Şekil 19: Hiperbolün benzer üçgenleri

Tanım 95. Eksenler dik ve $a \neq c$ ise ucu (a, b) ve (c, d) olan doğrunun **eğimi**

$$\frac{b-d}{a-c}.$$

Söz 96. Tanım 95'te eksenlerin dik olması gerekmez ama normaldir.

Teorem 97. *Paralel doğruların eğimleri aynıdır. Dik eksene göre, $a \neq c$ ise (a, b) ve (c, d) noktalarından geçen uçsuz doğrunun noktaları,*

$$y = \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. Eğimi e/f olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$y = \frac{e}{f} \cdot (x - a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. y eksenine paralel olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$x = a$$

denklemini sağlayan noktalarıdır.

Söz 98. Şu anda Descartes'ın ortaya koyduğu uylaşım uygundur:

Tanım 99. Bir **birim** uzunluğu seçilirse,

$$1$$

olarak yazılabilir. Eğer $a \cdot b = c \cdot 1$ ise, o zaman ab alanı c olarak anlaşılabilir. Bu şekilde alan, hacim, oran—her şey bir uzunluk olur. Özel olarak eğim, bir harf ile yazılabilir.

Teorem 100. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre y eksenine paralel olmayan doğrunun denkliği*

$$y = mx + b$$

biçiminde yazılabilir, ve bunun gibi her denklem, eğimi m olan ve $(0, b)$ noktasından geçen doğruyu tanımlar. Benzer şekilde $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ ise (yani $a^2 + b^2 \neq 0$ ise)

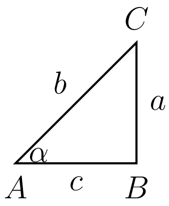
$$ax + by + c = 0$$

denklemi bir doğru tanımlar, ve her doğrunun denklemi bu şekilde yazılabilir.

Tanım 101. Şekil 20'de $\angle BAC$ dik ise

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Burada α, $\angle BAC$ açısının eşitlik sınıfı olarak anlaşılabilir, ve



Şekil 20: Kosinüs tanımı

$\cos\alpha$, açının **kosinüsüdür.** Dik açının ölçüsü

$$\frac{\pi}{2}.$$

O zaman

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

ve β geniş açı ise

$$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta).$$

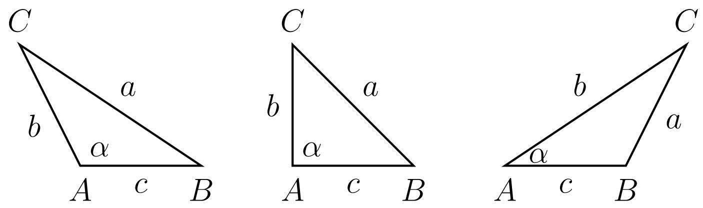
Teorem 102 (Kosinüs Teoremi)**.** *Şekil 21'de*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Tanım 103. Dik eksenlere göre

$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd,$$
$$\|(a, b)\| = \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(a, b) noktası, $(0, 0)$ başlangıç noktasından (a, b) noktasına giden yönlü doğru olarak anlaşılabilir.



Şekil 21: Kosinüs Teoremi

Teorem 104. *Dik eksenlere göre* (a, b) *ve* (c, d) *arasındaki açı* θ *ise*

$$(a, b) \cdot (c, d) = \|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\| \cdot \cos\theta.$$

Teorem 105 (Cauchy–Schwartz Eşitsizliği)**.**

$$(ac + bd)^2 \leqslant (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

Tanım 106 (mutlak değer)**.** $|a| = \begin{cases} a, & \text{eğer } a \geqslant 0 \text{ ise,} \\ -a, & \text{eğer } a < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Teorem 107. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre* (s, t) *noktasının* $ax + by + c = 0$ *doğrusuna uzaklığı*

$$\frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3.4 Dik eksenlere göre koni kesitleri

Tanım 108. $a \neq 0$ ise

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Söz 109. Şimdi $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ ise, dik eksenlere göre,

$$y^2 = \ell x - \frac{\ell}{2a} x^2$$

Apollonius denklemi, ekseni x ekseni olan ve köşesi başlangıç noktası olan

- $a < 0$ durumunda hiperbolü,
- $a = \infty$ durumunda parabolü,
- $a > 0$ durumunda elipsi

tanımlar. Şekil 22'ye bakın.

Söz 110. $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ (ve $a \neq \infty$) olsun, ve

$$b > 0, \qquad 2b^2 = \ell a$$

olsun. O zaman dikey kenarı ℓ olan, yanlamasına kenarı $2|a|$ olan merkezli koni kesitlerinin merkez denklemi

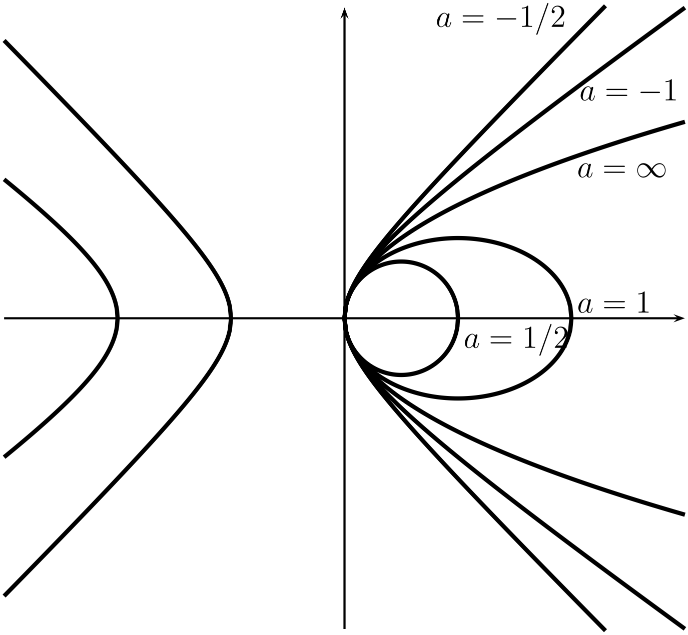
$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Şekil 23'e bakın.

Tanım 111. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ denklemi, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolün **asimptotlarını** tanımlar. Yani hiperbolün asimptotları, $y = \pm(b/a)x$ doğrularıdır.

Teorem 112. *$y^2 = \ell x + (\ell/2a)x^2$ hiperbolün asimptotlarının denklemi*

$$y = \pm\sqrt{\frac{\ell}{2a}} \cdot (x - a).$$



Şekil 22: $y^2 = x - x^2/2a$ koni kesitleri

Tanım 113. Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün **odak noktası**

$$\left(\frac{\ell}{4}, 0\right)$$

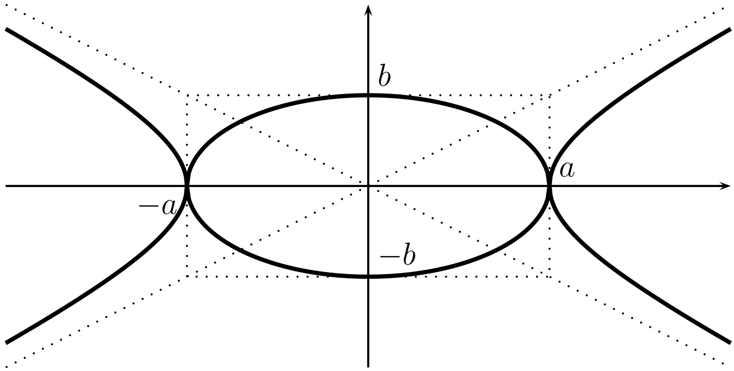
ve **doğrultman doğrusu**

$$x + \frac{\ell}{4} = 0.$$

Teorem 114. *Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün noktaları, odak noktasına ve doğrultmana uzaklığı aynı olan noktalardır.*

Tanım 115. Denklemi $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ olan hiperbolün **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0),$$



Şekil 23: $x^2/4 \pm y^2 = 1$ koni kesitleri

(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Şekil 24'e bakın. Ayrıca $0 < b < a$ ise denklemi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ olan elipsin **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0),$$

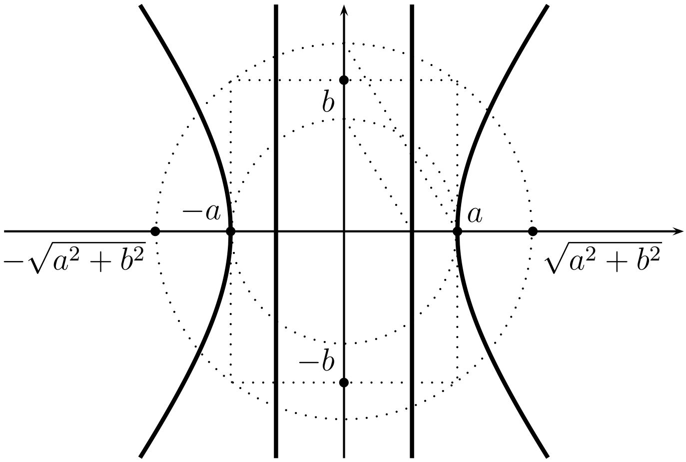
(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Şekil 25'e bakın.



Şekil 24: Hiperbolün odakları ve doğrultmanları

Söz 116. Şekil 26'daki gibi merkezli koni kesitinin merkezi A, ve (merkezin aynı tarafında olan) köşesi B, ve odağı C ise, ve doğrultmanı, koni kesitinin eksenini D noktasında keserse, tanıma göre koni kesitinin dışmerkezliliği $AC : AB$, ama

$$AC : AB :: AB : AD,$$

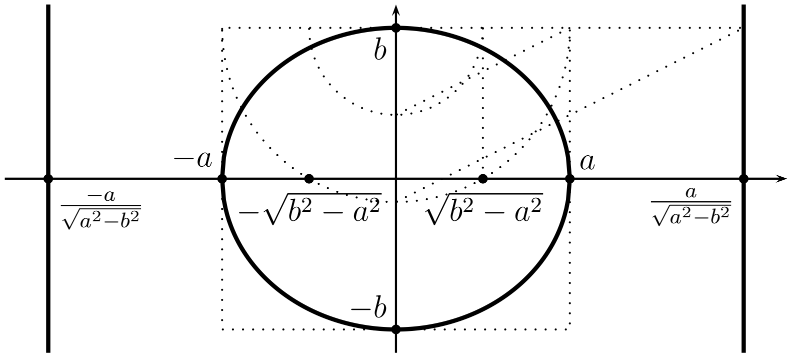
dolayısıyla

$$BC : BD :: AC : AB,$$

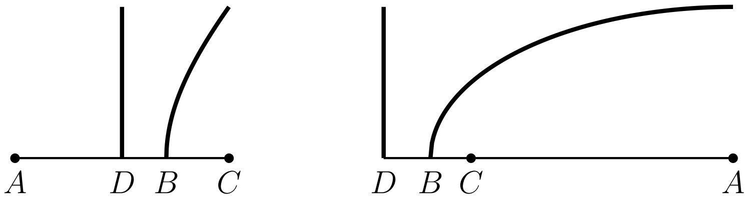
ve sonuç olarak koni kesitinin dışmerkezliliği $BC : BD$.

Teorem 117. *Merkezli koni kesitinin noktaları, bir odak noktasına ve ona karşılık gelen doğrultman doğrusuna uzaklıklarının oranının dışmerkezlilik olduğu noktalardır. Yani Şekil 27 ve 28'de ($CB = C'B'$ ve $BD = B'D'$ olduğundan) aşağıdaki koşullar denktir:*

- *E noktası koni kesitinde,*



Şekil 25: Elipsin odakları ve doğrultmanları



Şekil 26: Odak ve doğrultman

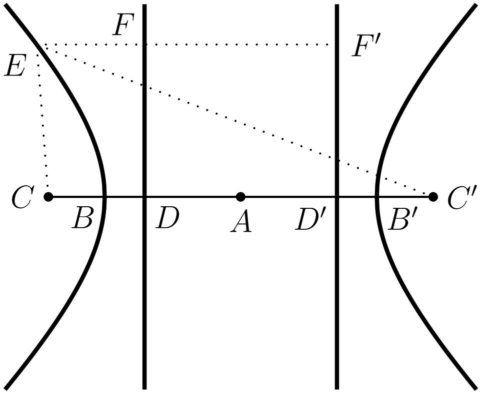
- $CE : EF :: CB : BD$,
- $C'E : EF' :: CB : BD$.

Söz 118. $BC : BD :: AB : AD :: BB' : DD'$ olduğundan merkezli koni kesitinin E noktaları için (ve sadece bu noktalar için)

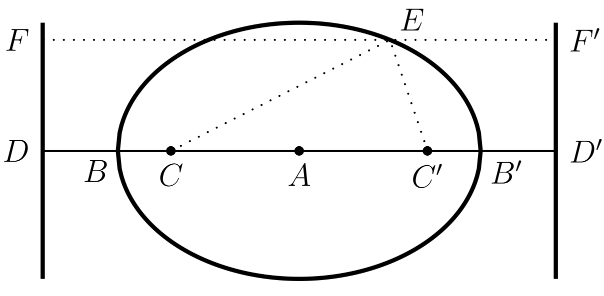
$$C'E \pm CE : EF' \pm EF :: BB' : DD'.$$

Elipste $EF' + EF = FF' = DD'$, dolayısıyla

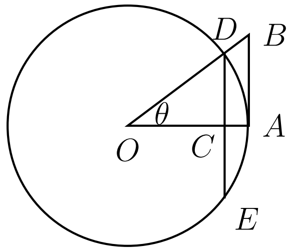
$$CE + C'E = BB'.$$



Şekil 27: Hiperbolün dışmerkezlilik



Şekil 28: Elipsin dışmerkezlilik



Şekil 29: Trigonometri (üçgen ölçmesi)

Hiperbolde E, soldaki daldaysa $EF' - EF = DD'$, dolayısıyla

$$C'E - CE = BB'.$$

3.5 Kutupsal koordinatlar

Tanım 119. Sayfa 38'deki Şekil 20'de $\angle BAC$ dik ise

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sec\alpha = \frac{b}{c},$$
$$\cos\alpha = \frac{c}{b}, \qquad \cot\alpha = \frac{c}{a}, \qquad \csc\alpha = \frac{b}{a}.$$

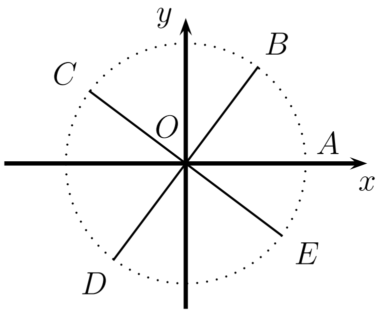
Söz 120. Şekil 29'daki çemberin yarıçapı birim ise

$$\sin\theta = CD = \frac{1}{2}DE, \qquad \tan\theta = AB, \qquad \sec\theta = OB.$$

Latince'de

- *tangens, tangent-,* "dokunan, teğet" demektir;
- *secans, secant-,* "kesen" demektir;
- *sinus,* "koy, körfez" demektir.

Latince *sinus*'un matematiksel kullanılışı, Arapça'dan yanlış çeviridir. Arapça'da



Şekil 30: Açıların ölçüsü

- *cayb,* "koy, körfez" demektir;
- *ciba,* "sinüs" demektir.

Tanım 121. Şekil 30'da BOD ve COE doğruları birbirine dik ise ve $\angle AOB = \alpha$ ise

$$\angle AOC = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \angle AOD = \alpha + \pi, \quad \angle AOE = \alpha + \frac{3\pi}{2}.$$

Herhangi β açı ölçüsü için

$$\beta = \beta \pm 2\pi = \beta \pm 4\pi = \cdots$$

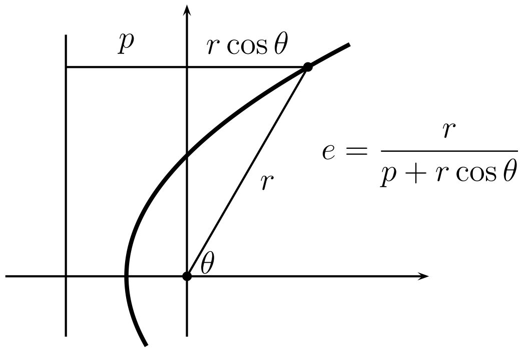
Düzlemde O olmayan herhangi F noktası için $OF = r$ ve $\angle AOF = \theta$ ise F noktasının **kutupsal koordinatları**

$$(r, \theta) \qquad \text{veya} \qquad (-r, \theta \pm \pi).$$

F noktasının dik koordinatları (x, y) ise

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r}, & \tan\theta &= \frac{y}{x}, & \sec\theta &= \frac{r}{x}, \\ \cos\theta &= \frac{x}{r}, & \cot\theta &= \frac{x}{y}, & \csc\theta &= \frac{r}{y}. \end{aligned}$$

Bir eğrinin noktalarının kutupsal koordinatlarının sağladığı bir denklem, eğrinin **kutupsal denklemidir.**



Şekil 31: Koni kesitinin kutupsal denklemi

Teorem 122. *Düzlemde O olmayan bir noktanın dik koordinatları (x, y) ve kutupsal koordinatları (r, θ) ise*

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, & x &= r\cos\theta, \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}, & y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Teorem 123. *Çember olmayan, odağı $(0, 0)$ olan, doğrultmanı $x + p = 0$ olan, dışmerkezliği e olan, koni kesitinin kutupsal denklemi*

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{$*$}$$

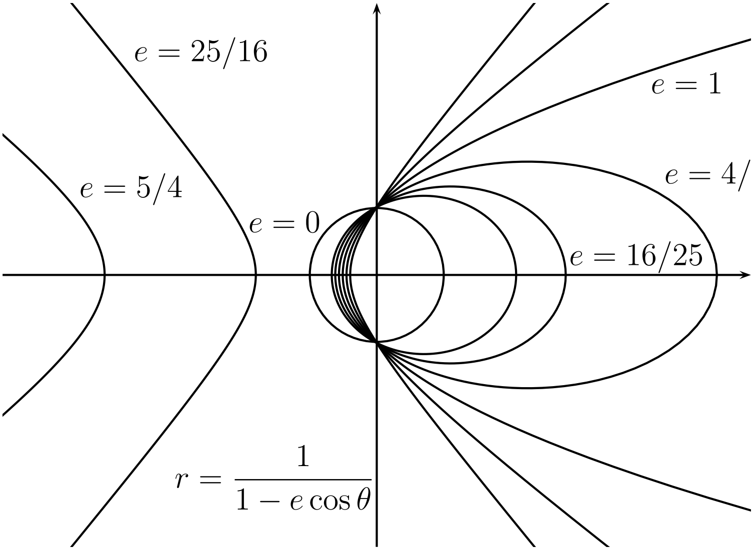
(Şekil 31'e bakın.) Karşılık gelen dik denklem,

$$(1 - e^2) \cdot x^2 + y^2 = 2e^2px + e^2p^2.$$

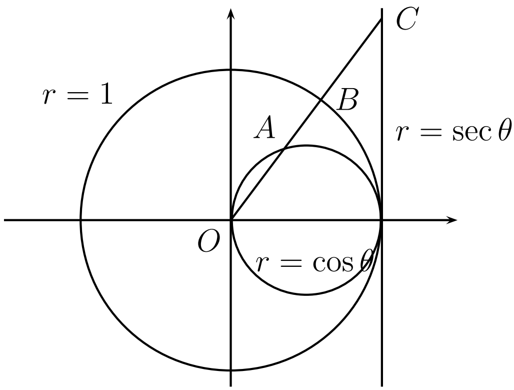
Söz 124. $e = 1/p$ durumunda $(*)$ denklemi

$$r = \frac{1}{1 - e\cos\theta}$$

olur. Bazı durumlar Şekil 32'de görünür.



Şekil 32: Dışmerkezliğe göre koni kesitleri



Şekil 33: Çemberler ve doğru

Teorem 125. *(Şekil 33'e bakın.)*

- $r = \cos\theta$ *kutupsal denklemi, merkezi* $(1/2, 0)$ *olan ve yarıçapı* $1/2$ *olan çemberi tanımlar.*
- $r = \sin\theta$ *kutupsal denklemi, merkezi* $(0, 1/2)$ *olan ve yarıçapı* $1/2$ *olan çemberi tanımlar.*
- $r = \sec\theta$ *kutupsal denklemi,* $x = 1$ *doğrusunu tanımlar.*
- $r = \csc\theta$ *kutupsal denklemi,* $y = 1$ *doğrusunu tanımlar.*

Söz 126. Şekil 33'te $OA : OB :: OB : OC$, ama $OB = 1$, dolayısıyla

$$OA \cdot OC = 1.$$

Teorem 127. *(Şekiller 34, 35, 36, ve 37'ye bakın.) Her* n *doğal sayısı için*

$$r = \cos(n\theta) \qquad \textit{ve} \qquad r = \sin(n\theta)$$

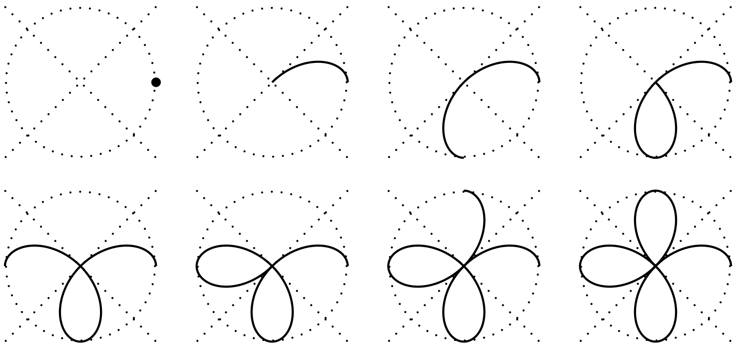
kutupsal denklemlerinin her biri,

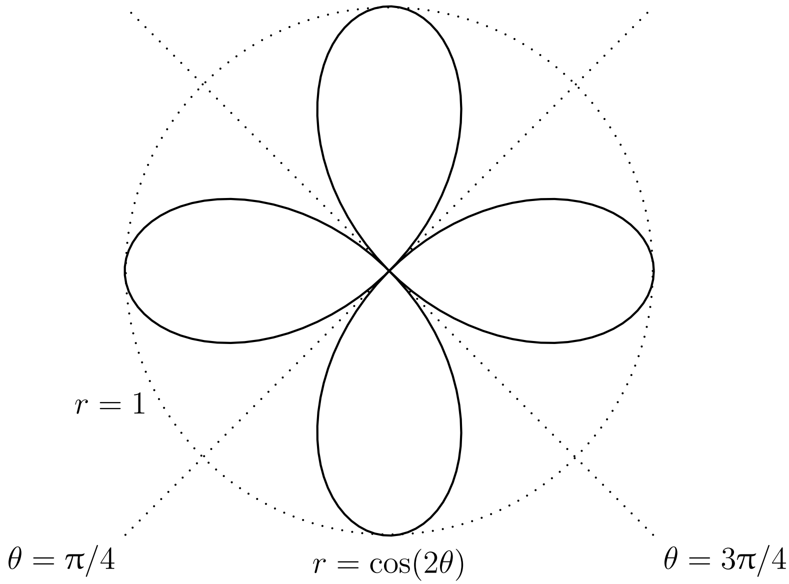
- n *sayısının çift olduğu durumda* $2n$***-yapraklı gülü*** *tanımlar.*
- n *sayısının tek olduğu durumda* n***-yapraklı gülü*** *tanımlar.*

Söz 128. Şekil 38'de görünen eğriler, $a \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right\}$ durumlarında

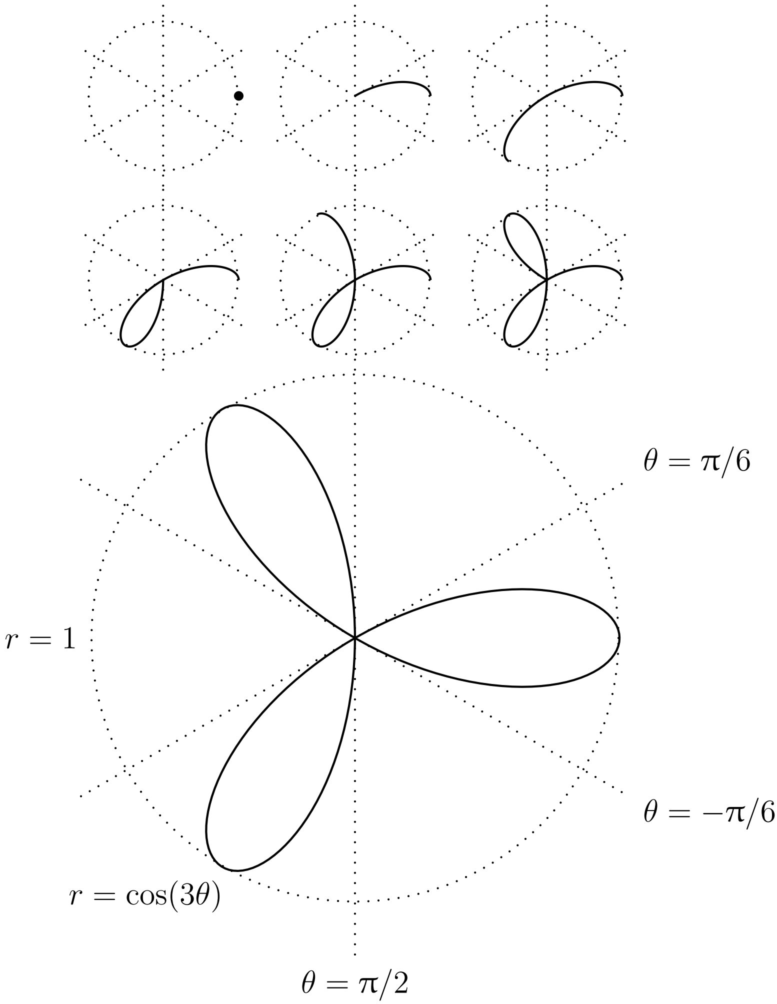
$$r = a + \cos\theta$$

kutupsal denklemi tarafından tanımlanır. Bu eğrilerin her birine **limason** denebilir (Fransızca'da *limaçon,* salyangoz demektir); $a = 1$ durumunda eğri **kardiyoid** (καρδιοειδής, "kalp şekli" demektir).

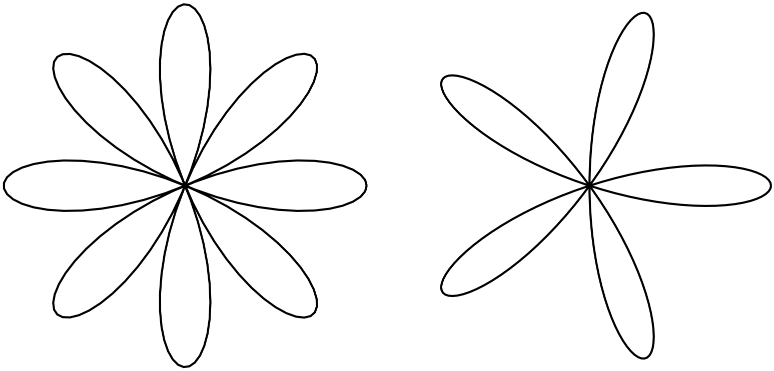




Şekil 34: 4-yapraklı gül

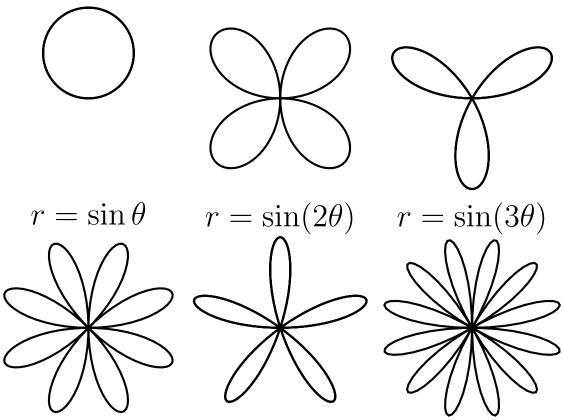


Şekil 35: 3-yapraklı gül



$r = \cos(4\theta)$ $r = \cos(5\theta)$

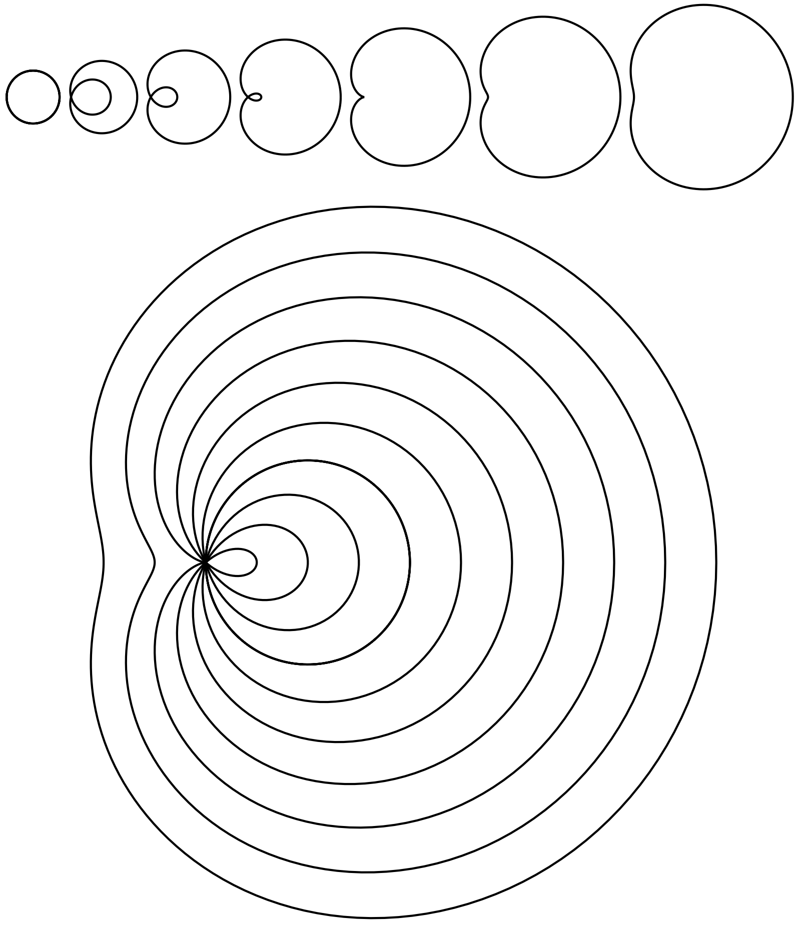
Şekil 36: 8- ve 5-yapraklı güller



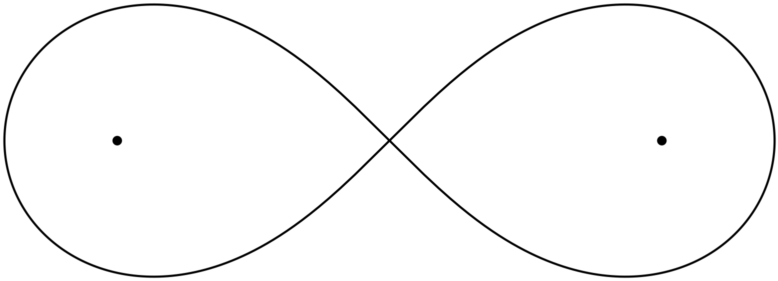
$r = \sin\theta$ $r = \sin(2\theta)$ $r = \sin(3\theta)$

$r = \sin(4\theta)$ $r = \sin(5\theta)$ $r = \sin(6\theta)$

Şekil 37: Güller



Şekil 38: Limasonlar



Şekil 39: Lemniskat

Teorem 129. $(\pm 1, 0)$ *noktalarına uzaklıklarının çarpımı birim olan noktaların yeri,*

$$r^2 = 2\cos(2\theta)$$

kutupsal denklemi tarafından tanımlanır. (Şekil 39'a bakın.)

Söz 130. Teorem 129'da tanımlanan eğriye **lemniskat** denir. Eski Yunanca λημνίσκος, "şerit, kurdele" demektir. (Çağdaş Yunanca κορδέλλα vardır; İtalyanca *cordola* vardır. Bunlar Eski Yunanca χορδή kelimesinden gelir.)

3.6 Uzay

Tanım 131. Tanım 79'daki gibi xy eksenleri verilmiş ise, onların O kesişim noktasından geçen ve onların düzleminde olmayan z **ekseni** eklenebilir.

Teorem 132. *Xyz eksenleriyle donatılmış uzayda, Teorem 80'deki gibi her A noktası için x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, z ekseninde bir ve tek bir D için*

- *AB doğrusu, yz düzlemine paraleldir,*
- *AC doğrusu, xz düzlemine paraleldir,*
- *AD doğrusu, xy düzlemine paraleldir.*[2]

Tam tersine b, c, ve d işaretli uzunluk olmak üzere, herhangi bir (b, c, d) sıralı üçlüsü için, x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, düzlemde bir ve tek bir A için

$$\overrightarrow{OB} = b, \qquad \overrightarrow{OC} = c, \qquad \overrightarrow{OD} = d,$$

ve yukarıdaki paralellik koşulları sağlanır.

Tanım 133. Teorem 132'de b, A noktasının x **koordinatıdır;** c, A noktasının y **koordinatıdır;** ve d, A noktasının z **koordinatıdır.** "Koordinatları (b, c, d) olan nokta" ifadesinin yerine "(b, c, d) noktası" diyebiliriz.

Teorem 134. *Xyz eksenleri dik ise (a, b, c) noktasının (d, e, f) noktasından uzaklığı*

$$\sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (e-f)^2}.$$

Teorem 135. *Eğer*

$$a^2 + b^2 \neq 0, \qquad c \neq 0, \qquad d \neq 0$$

ise, o zaman dik xyz eksenlerine göre

$$y^2 + z^2 = d^2x^2$$

denklemi, bir dik koninin yüzeyini tanımlar, ve

$$ax + by = c$$

denklemi, koniyi kesen bir düzlemi tanımlar. Bu şekilde bir koni kesiti belirtilir.

[2] Dejenere durumda A zaten bir eksendedir.

Söz 136. Teorem 134'ü kullanarak Teorem 135'teki koni kesitinin özelliklerini kanıtlanabilir. Özel olarak kesitin rastgele noktasının ordinatının ve karşılık gelen absisin uzunlukları bulunabilir ve onların ilişkisi belirtilebilir. Ama Teorem 135'teki koni diktir, ve Teorem 52 ve 61'deki koniler dik olmayabilir.

3.7 Vektörler

Söz 137. Tanım 67'de *vektörler* tanımladık. Bu tanım, uzayda da geçerlidir.

Teorem 138. *Ya xy düzleminde ya da xyz uzayında her* $\overrightarrow{AB}$ *yönlü doğrusu için, bir ve tek bir* C *noktası için*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}.$$

Tanım 139. Teorem 138 sayesinde "$\overrightarrow{OC}$ vektörü" ifadesinin yerine "C vektörü" diyebiliriz. Ayrıca bir vektör için

$$\vec{c}$$

gibi bir ifade kullanılabilir: düzlemde $\vec{c}$ bir (c_1, c_2) noktasını belirtir; uzayda bir (c_1, c_2, c_3) noktasını belirtir. Vektörler toplanabilir ve çoğaltılabilir:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$a \cdot (b_1, b_2, b_3) = (ab_1, ab_2, ab_3).$$

Ayrıca birbirini çarpabilir, ama sonuç bir uzunluk, yani bir **skalerdir:**

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Düzlemde benzer tanımlar kullanılır. Ya düzlemde ya da uzayda

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

İki vektörün **açısı** vardır: nokta olarak vektörler A ve B ise vektörlerin açısı

$$\angle AOB.$$

Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri birbirine dik ise (yani açısı $\pi/2$ ise),

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

ifadesi kullanılabilir. Vektörler paralel ise (yani açısı 0 veya π ise)

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

ifadesi kullanılabilir.

Teorem 140. *Dik eksenlere göre bir $\vec{a}$ vektörünün uzunluğu*

$$\|\vec{a}\|,$$

ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin açısı θ ise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta.$$

Özel olarak

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Söz 141. Teoremin kanıtı, Kosinüs Teoremini (yani Teorem 102'yi) kullanır. Soyut bir "iç çarpım uzayında" Teorem 140, uzunlukların ve açıların *tanımıdır.*

Teorem 142. *Dik xyz eksenleriyle donatılmış uzayda, sıfır olmayan bir $\vec{a}$ vektörüne dik olan ve bir $\vec{b}$ noktasından geçen düzleminin denklemi*

$$\vec{a} \cdot (x, y, z) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Söz 143. Uzayda bir düzlemin denklemi, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ olmak üzere

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = d \qquad \text{veya} \qquad ax + by + cz = d$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 144. *Dik xyz eksenleriyle donatılmış uzayda, bir $\vec{c}$ noktasının bir $\vec{a} \cdot (x, y, z) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ düzlemine uzaklığı*

$$\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})|}{\|\vec{a}\|}.$$

Kanıt. Eğer $\vec{b}-\vec{c}$ ve $\vec{a}$ vektörlerinin açısı θ ise istediğimiz uzaklık

$$\|\vec{c} - \vec{b}\| \cdot |\cos\theta|,$$

yani (Teorem 140'a göre)

$$\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})|}{\|\vec{a}\|}. \qquad \square$$

Söz 145. Teoremde düzlemin denklemi $ax + by + cz = d$ ve nokta (s, t, u) ise istenen uzaklık

$$\frac{|as + bt + cu - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Söz 146. Eğer $\vec{a}$, $\vec{b}$, ve $\vec{c}$ noktaları verilirse, sıfır olmayan bir $\vec{d}$ için verilmiş noktalardan geçen düzlem

$$\vec{d} \cdot (x, y, z) = \vec{d} \cdot \vec{a} \qquad \text{veya} \qquad \vec{d} \cdot \big((x, y, z) - \vec{a}\big) = 0$$

biçiminde yazılabilir. O zaman $\vec{d}$ vektörü,

$$\begin{cases} (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{$\dagger$}$$

yani

$$\begin{cases} (b_1 - a_1) \cdot x + (b_2 - a_2) \cdot y + (b_3 - a_3) \cdot z = 0 \\ (c_1 - a_1) \cdot x + (c_2 - a_2) \cdot y + (c_3 - a_3) \cdot z = 0 \end{cases}$$

doğrusal denklem sisteminin sıfır olmayan bir çözümüdür.

Tanım 147. Uzayda

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Burada

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Teorem 148. *Uzayda*

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \qquad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}.$$

Ayrıca $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin açısı θ ise

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta,$$

dolayısıyla

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Söz 149. Sonuç olarak (†) sisteminin bir çözümü,

$$(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}).$$

Söz 150. Uzayda $\vec{a} \cdot (x, y, z) = b$ ve $\vec{c} \cdot (x, y, z) = d$ düzlemleri paraleldir (veya aynıdır) ancak ve ancak

$$\vec{a} \parallel \vec{c}.$$

Düzlemler parelel değilse, bir doğruda kesişir. Bu durumda doğru $\vec{a} \times \vec{c}$ vektörüne paraleldir. Doğru bir $\vec{e}$ noktasından geçerse, doğrunun her noktası

$$\vec{e} + t \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{f}$ olsun. Doğrunun **parametrik denklemi**

$$(x, y, z) = \vec{e} + t \cdot \vec{f}.$$

Bu denklem

$$\begin{cases} x = e_1 + f_1 t \\ y = e_2 + f_2 t \\ z = e_3 + f_3 t \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan iki düzlemin denklemleri çıkar, ve her birinde, değişkenlerin biri görünmez. Örneğin $f_1 f_2 f_3 \neq 0$ ise

$$\frac{x - e_1}{f_1} = \frac{y - e_2}{f_2} = \frac{z - e_3}{f_3}.$$

Kaynakça

[1] Apollonius of Perga. *Apollonii Pergaei Qvae Graece Exstant Cvm Commentariis Antiqvis*, volume I. Teubner, 1974. Edited with Latin interpretation by I. L. Heiberg. First published 1891.

[2] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III.* Green Lion Press, Santa Fe, NM, revised edition, 1998. Translated and with a note and an appendix by R. Catesby Taliaferro, with a preface by Dana Densmore and William H. Donahue, an introduction by Harvey Flaumenhaft, and diagrams by Donahue, edited by Densmore.

[3] Archimedes. *The Two Books* On the Sphere and the Cylinder, volume I of *The Works of Archimedes.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.

[4] Carl B. Boyer. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, New York, 1968.

[5] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük.* Kabalcı, İstanbul, 2011.

[6] René Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the

French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[7] Thomas Heath. *A History of Greek mathematics. Vol. II.* Dover Publications Inc., New York, 1981. From Aristarchus to Diophantus, Corrected reprint of the 1921 original.

[8] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination.* Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Neményi.

[9] H. I. Karakaş. *Analytic Geometry.* M $\oplus$ V [Matematik Vakfı], [Ankara], n.d. [1994].

[10] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[11] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon.* Clarendon Press, Oxford, 1996. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.

[12] Alfred L. Nelson, Karl W. Folley, and William M. Borgman. *Analytic Geometry.* The Ronald Press Company, New York, 1949.

[13] Sevan Nişanyan. *Sözlerin Soyağacı: Çağdaş Türkçenin Etimolojik Sözlüğü.* Adam Yayınları, İstanbul, 3rd edition, 2007. "The Family Tree of Words: An Etymological Dictionary of Contemporary Turkish." Genişletilmiş gözden geçirilmiş ("expanded and revised").

[14] Öklid. *Öğelerin 13 Kitabından Birinci Kitap.* Matematik Bölümü, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul, 4th edition, Eylül 2014. Öklid'in Yunanca metni ve Özer Öztürk & David Pierce'in çevirdiği Türkçesi.

[15] Pappus. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.

[16] J. T. Pring, editor. *The Pocket Oxford Greek Dictionary.* Oxford University Press, 2000.

[17] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid.* Number 335 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor.

[18] R. S. Underwood and Fred W. Sparks. *Analytic Geometry.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1948.

[19] M. Vygodsky. *Mathematical Handbook: Higher Mathematics.* Mir Publishers, Moscow, 1975. Translated from the Russian by George Yankovsky. Fifth printing 1987.