

# Öklid alıştırmaları

Mat 113, MSGSÜ

30 Ekim 2013

<b>İçindekiler</b>			
	17. önermeden sonra	4	
1. önermeden sonra	2	19. önermeden sonra	5
5. önermeden sonra	2	26. önermeden sonra	5
6. önermeden sonra	2	28. önermeden sonra	5
7. önermeden sonra	3	29. önermeden sonra	6
8. önermeden sonra	3	32. önermeden sonra	6
9. önermeden sonra	3	34. önermeden sonra	6
10. önermeden sonra	3	35. önermeden sonra	7
11. önermeden sonra	3	36. önermeden sonra	7
12. önermeden sonra	4	41. önermeden sonra	8
15. önermeden sonra	4	43. önermeden sonra	8
	4	Çarpma	11

## 1. önermeden sonra

**Alıştırma 1.** Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruada, kenarları birbirine eşit olan ama tabana eşit olmayan bir üçgen inşa edin.

**Alıştırma 2.** Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruada, kenarlarının sadece biri tabana eşit olan bir üçgen inşa edin.

**Alıştırma 3.** Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruada, çeşitkenar bir üçgen inşa edin.

## 5. önermeden sonra

**Alıştırma 4.** Hiç bir postulat kullanmadan ikizkenar bir üçgenin tabanındaki açıların birbirine eşit olduğunu ispatlayın.

**Alıştırma 5.** Bir dörtgende, iki bitişik kenar birbirine eşittir, ve iki kalan bitişik kenar birbirine eşittir. Eşit olmayan kenarlar tarafından yapılmış açıların eşit olduğunu ispatlayın.

## 6. önermeden sonra

**Alıştırma 6.** Bir üçgenin iki kenarı birbirine eşit olmasın. *Olmayana ergi yöntemi kullanmadan* raptedilen açıların eşit olmadığı kanıtlanabilir mi?

**Alıştırma 7.** Üç açısı birbirine eşit olan bir üçgenin eşkenar olacağını ispatlayın.

**Alıştırma 8.** Eğer bir üçgenin tabanının altındaki dış açılar eşitse üçgen ikizkenardır.

## 7. önermeden sonra

**Alıştırma 9.** Yedinci önermede, Öklid sadece bir durumun olanaksızlığını ispatlar. Öteki durumların olanaksızlığını ispatlayın.

## 8. önermeden sonra

**Alıştırma 10.** Doğru uzatma postulatını kullanmadan 2. önermeyi çözün, yani verilmiş noktaya verilmiş doğruya eşit olan bir doğru yerleştirin.

## 9. önermeden sonra

**Alıştırma 11.** 8. önermeyi kullanmadan 9. önermeyi kanıtlayın.

## 10. önermeden sonra

**Alıştırma 12.** 1. önermeyi çözmek için, iki daire gerekir, dolayısıyla 9. önermeyi çözmek için, üç daire gerekir. Öyleyse Öklid'in yöntemiyle 10. önerme beş daire kullanır. *İki* daire kullanarak verilmiş sınırlı bir doğruyu ikiye bölün.

**Alıştırma 13.** Herhangi bir ikizkenar üçgende tabana inen kenar-ortay diktir.

## 11. önermeden sonra

**Alıştırma 14.** 8. önermeyi kullanmadan 11. önermeyi kanıtlayın.

## 12. önermeden sonra

**Alıştırma 15.** Uygulamayı kullanmadan sekizinci önermeyi ispatlayın.

## 15. önermeden sonra

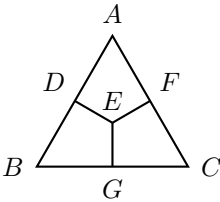
**Alıştırma 16.** Verilen bir doğrunun bir noktasından iki doğru, ayrı tarafa çizilsin. Öklid'in 15. önermesine göre, eğer bu iki doğru, bir doğru üzerindeyse, o zaman verilen doğruyla oluşturdukları ters açılar birbirine eşittir. Bu önermenin tersini gösterin.

## 17. önermeden sonra

**Alıştırma 17.** Bir kenar uzatlamadan 17. önermeyi ispatlayın. (Proklos bunu bir köşeden karşı kenara bir doğru çizerek ispatladı.)

**Alıştırma 18.** İki üçgende, tabandaki bir açı tabandaki bir açıya eşitse, açığı gören kenar açığı gören kenara eşitse, ve kalan kenar kalan kenara eşitse, ya tabanlar birbirine eşittir, ya da tabanlardaki kalan açıların biri oput [geniş], biri dardır.

**Alıştırma 19.**



$ABC$  üçgeninde  $DE$  doğrusu,  $AB$  kenarına dik ve bu kenarı ikiye böler. Benzer şekilde  $FE$  doğrusu,  $AC$  kenarına dik ve bu kenarı ikiye böler.  $EG$  doğrusu,  $BC$  kenarına dikse, bu kenarı ikiye böldüğünü gösterin.

## 19. önermeden sonra

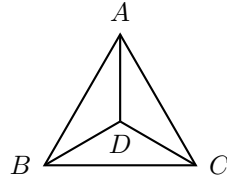
**Alıştırma 20.** Bir doğruya dışındaki bir noktadan indirilen dikme, o noktayı doğru üzerindeki noktalara birleştiren diğer doğrulardan küçüktür.

## 26. önermeden sonra

**Alıştırma 21.** İkizkenar üçgende tabandaki açları ikiye bölenlerin (yani *açıortayların*) birbirine eşit olduğunu gösterin.

**Alıştırma 22.**

$ABC$  üçgeninde  $BD$  ile  $CD$ , tabandaki açları ikiye böler.  $AD$  doğrusunun da  $BAC$  açısını ikiye böldüğünü gösterin.

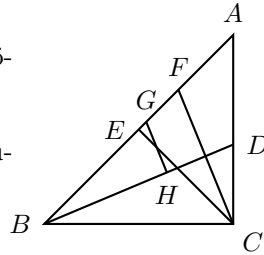


## 28. önermeden sonra

**Alıştırma 23.** Tabanındaki açları ikiye bölenlerin eşit olduğu üçgenin ikizkenar olduğunu gösterin. *İpucu:* Aşağıdaki şekli kullanarak karşıt tersini gösterin.

$ABC$  üçgeninde

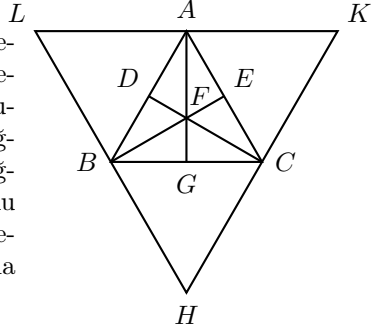
- 1)  $BD$  ile  $CE$ , tabandaki açları ikiye böler;
- 2)  $FCE$  açısı,  $ABD$  açısına eşittir;
- 3)  $AB$  kenarının  $BG$  parçası,  $CF$  doğrusuna eşittir;
- 4)  $BGH$  açısı,  $BFC$  açısına eşittir.



## 29. önermeden sonra

### Alıştırma 24.

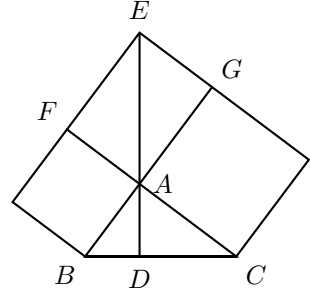
$ABC$  üçgeninde  $CD$  doğrusu,  $AB$  kenarına diktir, ve  $BE$  doğrusu,  $AC$  kenarına diktir. Bu  $CD$  ile  $BE$  doğruları,  $F$  noktasında kesişirler.  $AG$  doğrusu,  $F$  noktasından geçer.  $AG$  doğrusunun  $BC$  tabanına dik olduğunu gösterin. *İpucu:*  $HKL$  üçgeninin kenarları,  $ABC$  üçgeninin kenarlarına paralel olsun.



## 32. önermeden sonra

### Alıştırma 25.

Şeklimiz, Öklid'in 47. önermesinden alınmıştır.  $ABC$  üçgeninde  $A$  noktasındaki açı diktir ve  $AD$  doğrusu,  $BC$  tabanına diktir.  $BF$  ile  $CG$  dörtgenleri, karedirler.  $AE$  doğrusu,  $AE$  dikdörtgeninin köşegenidir.  $AD$  ile  $AE$  doğrularının bir doğrudaki olduğunu gösterin.



## 34. önermeden sonra

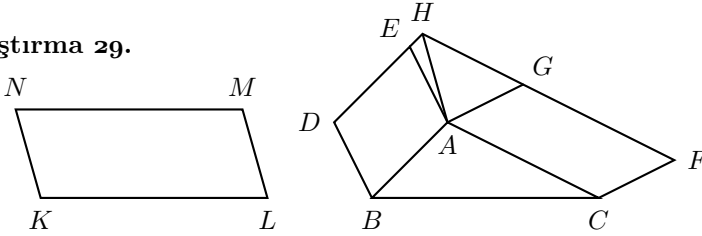
**Alıştırma 26.** Bir dikdörtgenin köşegenlerinin birbirine eşit olduğunu gösterin.

**Alıştırma 27.** Bir paralelkenarın köşegenlerinin birbirini ikiye böldüğünü gösterin.

**Alıştırma 28.** İki paralelkenarda, iki bitişik kenar, iki bitişik kenara eşit ise, ve içerilen açı, içerilen açığa eşit ise, paralelkenarlar birbirine eşittir.

### 35. önermeden sonra

**Alıştırma 29.**



$ABC$ , herhangi bir üçgendir, ve  $AD$  ile  $AF$ ,  $ABC$  üçgeninin kenarlarında rastgele seçilmiş iki paralelkenardır. Gerekirse, bu paralelkenarların  $DE$  ile  $FG$  kenarları uzatılır, ve  $H$  noktasında kesişirler.  $KLMN$  paralelkenarında,  $KL$  tabanı,  $ABC$  üçgeninin  $BC$  tabanına eşit, ve  $KN$  kenarı,  $AH$  doğrusuna eşittir; ve  $NKL$  açısı,  $ABC$  ile  $DHA$  açılarının toplamına eşittir.  $AD$  ile  $AF$  paralelkenarlarının toplamının  $KLMN$  paralelkenarına eşit olduğunu gösterin.

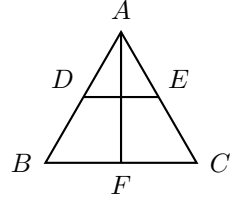
### 36. önermeden sonra

**Alıştırma 30.** İki paralelkenar, aynı paralellerde olsun. Öklid'in 36. önermesine göre, paralelkenarların tabanları birbirine eşitse, paralelkenarlar da birbirine eşittir. Tersini gösterin.

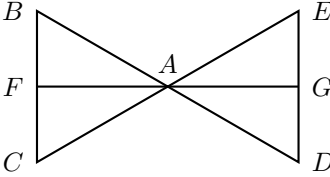
## 41. önermeden sonra

### Alıştırma 31.

$DE$  doğrusu,  $ABC$  üçgeninin  $BC$  tabanına paraleldir.  $AF$  doğrusu, tabanı ikiye böler.  $AF$  doğrusunun  $DE$  doğrusunu da ikiye böldüğünü gösterin.



### Alıştırma 32.

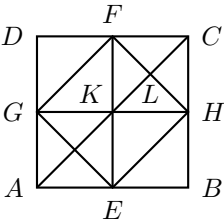
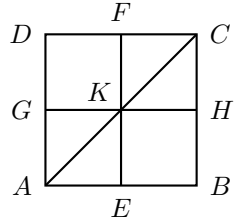


Şekilde  $DE$  doğrusu,  $BC$  doğrusuna paraleldir, ve  $BD$ ,  $CE$ , ve  $FG$  doğruları, birbiriyle  $A$  noktasında kesişirler.  $FG$  doğrusu,  $BC$  doğrusunu ikiye böler.  $FG$  doğrusunun  $DE$  doğrusunu da ikiye böldüğünü gösterin.

## 43. önermeden sonra

### Alıştırma 33.

$ABCD$  bir paralelkenardır, ve  $EF$  ile  $GH$  doğruları, paralelkenarın kenarlarına paraleldir. Öklid'in 43. önermesine göre, eğer  $AK$  ile  $KC$  doğruları, bir doğrudaysa, o zaman  $DK$  ile  $KB$  paralelkenarları, birbirine eşittir. Bu önermenin tersini gösterin.

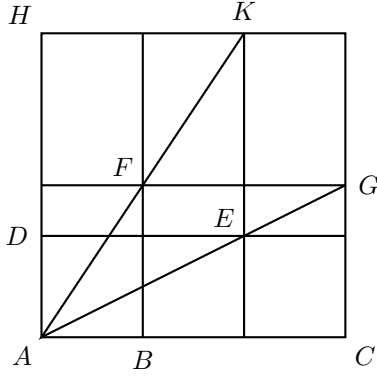


*İpucu:*  $FG$ ,  $GE$ ,  $EH$ ,  $HF$ , ve  $AKL$ , doğrular olsun. O zaman

- 1)  $AL$ ,  $GE$  doğrusunu ikiye böler;
- 2)  $EFG$  ile  $EHG$  üçgenleri, birbirine eşittir;
- 3)  $AL$ ,  $FH$  doğrusunu ikiye böler;
- 4)  $FLK$  ile  $CLH$  açıları, birbirine eşittir.

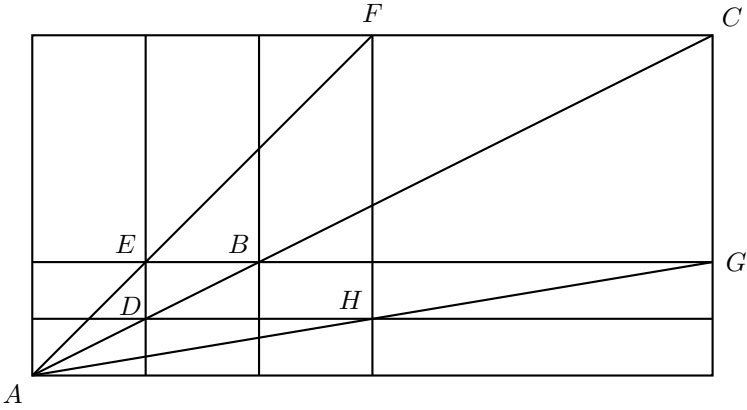


**Alıştırma 34.** Diagramda dikey doğrular birbirine paraleldir, ve

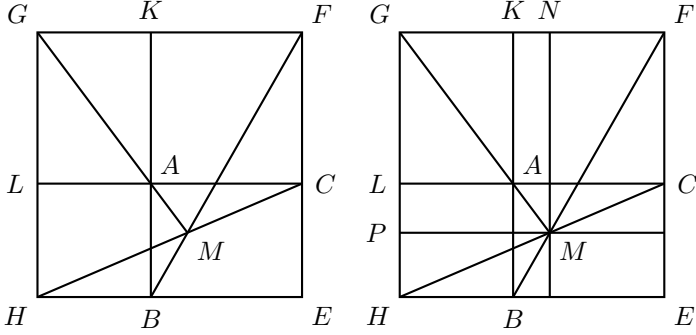


yatay doğrular birbirine paraleldir, ve  $BD$  dörtgeni bir karedir.  $AFK$  çizgisi doğrudur.  $AEG$  çizgisinin doğru olması için  $CH$  dörtgeninin kare olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösterin.

**Alıştırma 35.** Diagramda dikey doğrular birbirine paraleldir ve yatay doğrular birbirine paraleldir.  $ADBC$  bir doğrudur ve  $AEF$  bir doğrudur.  $AH$  ile  $HG$  doğrularının bir doğru olduğunu gösterin.



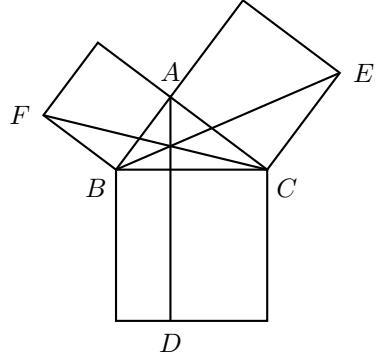
**Alıştırma 36.**



$EFGH$  paralelkenarında  $BK$  ile  $LC$  doğruları, kenarlara paraleldirler, ve  $A$  noktasında kesişir.  $EL$  paralelkenarının  $CH$  köşegeni çizilmiştir.  $GA$  doğrusu çizilmiş ve  $CH$  doğrusundaki  $M$  noktasına uzatılmıştır.  $MB$  ile  $MF$  doğruları çizilmiştir. Bu  $MB$  ile  $MF$  doğrularının bir doğrudaki olduğunu gösterin.

**Alıştırma 37.**

Öklid'in 47. önermesinin şeklinde  $AD$ ,  $BE$ , ve  $CF$  doğrularının bir noktada kesiştiğini gösterin. (Burada  $AD$  doğrusu,  $BC$  doğrusuna diktir.)



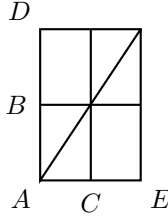
## Çarpma

Çağdaş dilde, Öklid'deki doğruların (yani sınırlanmış doğruların) eşitliği, bir *denklik bağıntısıdır*. Yani eşitlik *yansımali*, *simetrik*, ve *geçişlidir*:  $A$ ,  $B$ , ve  $C$  doğrular ise, o zaman

- $A = A$ ,
- $A = B$  ise  $B = A$ ,
- $A = B$  ve  $B = C$  ise  $A = C$ .

Bir doğrunun *denklik sınıfı*, bu doğruya eşit olan doğruların sınıfıdır. Bir  $A$  doğrusunun denklik sınıfı  $|A|$  ile gösterilsin, ve ona,  $A$  doğrusunun **uzunluğu** densin.

İki uzunluğun çarpımını tanımlamak istiyoruz. Bir *birim* uzunluğu seçilmelidir. Seçilsin. Aşağıdaki dikdörtgende  $AB$  doğrusunun uzun-



luğu, birim olsun. O zaman  $AE$  tabanının uzunluğu, sadece  $AC$  ve  $AD$  doğrularının uzunluklarına bağlıdır. Bu durumda

$$|AE| = |AD| \cdot |AC|$$

olsun.

**Alıştırma 38.** 34. alıştırmaı kullanarak çarpmanın değişmeli olduğunu gösterin.

**Alıştırma 39.** 35. alıştırmaı kullanarak çarpmanın birleşmeli olduğunu gösterin.