MSGSÜ, MAT 113, Sınav *çözümleri*

Özer Öztürk, David Pierce

20 Ocak 2012, Saat 12:00

Soru 1. Yunan alfabesini sırasında yazın:

Çözümü. Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

Soru 2. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \sim (P \wedge Q) \Rightarrow R$ denkliğini bir doğruluk tablosuyla gösterin.

Çözümü.

P	$\Rightarrow$	$(Q$	$\Rightarrow$	$R)$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\Rightarrow$	R
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Soru 3. Verilmiş eşkenar üçgene eşit olan bir dikdörtgen inşa edin. (Bu, Öklid'in I.42. önermesinin özel bir durumudur. Bu önerme dışındaki önermeleri kullanabilirsiniz.)

Çözümü. Verilmiş eşkenar üçgen ABC olsun.

BC doğrusu D noktasında ikiye kesilmiş olsun [I.10].

AD birleştirilmiş olsun.

A noktasından DC doğrusuna paralel AE doğrusu çizilmiş olsun [I.31].

AE doğrusu, DC doğrusuna eşit olsun [I.3].

EC birleştirilmiş olsun.

O zaman $ADCE$, bir parallelkenardır [I.33].

Ayrıca AC köşegeni, $ADCE$ paralelkenarını ikiye böler [I.34].

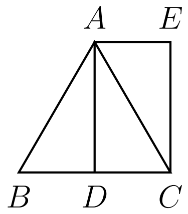
Ancak AD doğrusu da, ABC üçgenini ikiye böler [I.38].

O zaman ADC üçgeni, hem ABC üçgeninin hem de $ADGE$ paralelkenarının yarısıdır.

Onun için ABC üçgenine $ADCE$ paralelkenarı eşittir.

Ayrıca, $AB = AC$, ve $BD = CD$, ve AD, ortaktır;

o yüzden ADB açısı, ADC açısına eşittir [I.8].
Özellikle, ADB ve ADC açıları, diktir.
O zaman DCE açısı da dik, [I.29],
ve DAE ve AEC açıları da diktir [I.34].
Yani, $ADCE$ paralelkenar, bir dikdörtgendir.



Soru 4. $P \Rightarrow R \models (P \wedge Q) \Rightarrow R$ gerektirmesini biçimsel kanıtla gösterin.

Çözümü.
$$\begin{gathered} P \Rightarrow R \\ \neg P \vee R \\ \neg Q \vee (\neg P \vee R) \\ (\neg Q \vee \neg P) \vee R \\ (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ \neg(P \wedge Q) \vee R \\ (P \wedge Q) \Rightarrow R \end{gathered}$$

Soru 5. Aşağıdaki problemleri çözün. (Bu, Öklid'in III.17. önermesidir. Bu önerme dışındaki önermeleri kullanabilirsiniz.)

a) Verilmiş çemberdeki verilmiş noktadan değen doğruyu çizmek.

b) Verilmiş daire dışındaki verilmiş noktadan değen doğruyu çizmek.

Çözümü. Öklid'in III.16. önermesine göre çapa dik açılarda çizilen doğru daireye değer.

a) Verilmiş ABC çemberdeki verilmiş nokta A olsun.

Verilmiş dairenin merkezi D olsun [III.1].

AD birleştirilmiş olsun [P.1].

AD doğrusu A tarafından bir E noktasına kadar uzatılmış olsun [P.2].

A noktasında ED doğrusuna dik bir AF doğrusu çizilmiş olsun [I.11].

AF doğrusu ABC çemberinin AD yarıçapına dik olduğundan ABC çemberine değer [III.16].

b) Verilmiş ABC dairesinin dışındaki nokta D olsun.

ABC dairesinin merkezi E olsun [III.1].

ED birleştirilmiş olsun [P.2].

ED doğrusunun ABC çemberini kestiği nokta F olsun.

E merkezli DE yarıçaplı DGH çemberi çizilmiş olsun [P.3].

F noktasından DGH çemberinin dışındaki bir I noktasına DE doğrusuna dik bir doğru çizilmiş olsun. [I.11].

FI doğrusunun DGH çemberini kestiği nokta K olsun.

KE birleştirilmiş olsun.

KE doğrusunun ABC çemberini kestiği nokta L olsun.

LD birleştirilmiş olsun.

ED ve EK doğruları DGH çemberinin yarıçapı olduklarından eşittirler.

EF ve EL doğruları ABC çemberinin yarıçapı olduklarından eşittirler.

DEL ve KEF üçgenlerininde $EF = EL$, $ED = EK$ ve E açıları ortak olduğundan bu iki üçgen eşittir [I.4]. Dolayısıyla EFK açısı ELD açısına esitir.

EFK bir dik açı olduğundan ELD de bir dik açıdır.

DL doğrusu ABC dairesinin EL yarıçapına dik olduğu için DL doğrusu ABC dairesine değer [III.16].