Önermeler mantığındaki biçimsel kanıtlar

David Pierce

26 Aralık 2011, saat 11:48

Bu yazının ana kaynakları, Burris'in [1] ve Nesin'in [4] kitapları ve *Foundations of Mathematical Practice* (Eylül 2010) adlı notlarım. Bazı terimler, [2, 3] kaynaklarından alınmıştır.

İçindekiler

1 Önermeler

Önerme, belli bir *durumda doğru* veya *yanlış* denebilen *cümledir.* Matematikte, durum çoğunlukla bir *yapıdır.* Örneğin, *her sayının tersi var* cümlesi, bir önermedir, ve bu önerme,

- $(\mathbb{N}, +)$ yapısında yanlış,
- $(\mathbb{Z}, +)$ yapısında doğru,
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ yapısında yanlış,
- $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ yapısında doğrudur. (Burada $\mathbb{Q}^+ = \{x \colon x \in \mathbb{Q} \land x > 0\}$.)

Belli bir durumda, bir önermenin **doğruluk değeri** vardır:

- önerme doğru ise, değeri 1;
- önerme yanlış ise, değeri 0'dır.

$\{0, 1\}$ kümesi için,

$$\mathbb{B}$$

harfini kullanalım. Önermeler için, P, Q, ve R gibi Latin harflerini kullanalım. Sonsuz tane önermemiz varsa, P_0, P_1, P_2 ve benzerlerini kullanabiliriz. Bir d durumunda, P önermesinin $\mathbb{B}$ kümesindeki değeri olarak

$$d(P)$$

kullanılabilir. O zaman d, önermeler kümesinden $\mathbb{B}$ kümesine bir fonksiyondur (dönüşümdür):

$$d\colon \{\text{önermeler}\} \to \mathbb{B}.$$

2 Doğruluk tabloları

Verilmiş önermelerden, **bağlaçlarla, bileşke önermeler** yapılabilir, ve onların değerleri, verilmiş önermelerin değerlerinden bulunabilir. Örneğin:

$$\begin{gathered} P \text{ ve } Q; \\ P \text{ veya } Q; \\ P \text{ ise } Q; \\ P \text{ ancak ve ancak } Q; \\ P \text{ değil.} \end{gathered}$$

(Dilbilgisinde, *ise* ve *değil,* bağlaç değildir; ama matematikte, öyle sayılabilir.) Bu örneklerde, sözcüklerin yerinde, kısaltma olarak, simgeler kullanılabilir:*

$$P \land Q$$

$$P \lor Q$$

$$P \Rightarrow Q$$

$$P \Leftrightarrow Q$$

$$\neg P$$

Yukarıdaki simgelere, **bağlayıcı** diyelim. Bileşke önermelerin farklı durumlardaki doğruluk değerleri, **doğruluk tablolarında**† gösterilebilir:

P	Q	$P \land Q$	$P \lor Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

P	$\neg P$
0	1
1	0

* $P \land Q$ yerine, $P \mathbin{\&} Q$; $P \Rightarrow Q$ yerine, $P \to Q$; $P \Leftrightarrow P$ yerine, $P \leftrightarrow Q$, yazılabilir.
† Veya doğruluk çizelgelerinde.

Mesela, ikinci satırdan, $d(P) = 1$ ve $d(Q) = 0$ ise, o zaman $d(P \Rightarrow Q) = 0$.

Doğruluk tabloları şöyle yazılabilir:

P	$\wedge$	Q
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	1	1

P	$\vee$	Q
0	0	0
1	1	0
0	1	1
1	1	1

P	$\Rightarrow$	Q
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

P	$\Leftrightarrow$	Q
0	1	0
1	0	0
0	0	1
1	1	1

$\neg$	P
0	1
1	0

Burada, bir önermenin değeri, önermenin bağlayıcısının altına yazılır.

Aslında, $P \Rightarrow Q$ gibi bir ifade gerçek bir önerme değildir; bir **önerme formülüdür;** ve P ve Q harfleri, **önerme değişkenleridir.** Değişkenlerin yerine gerçek önermeleri koyarsak, önerme formülü, bir önerme olur.

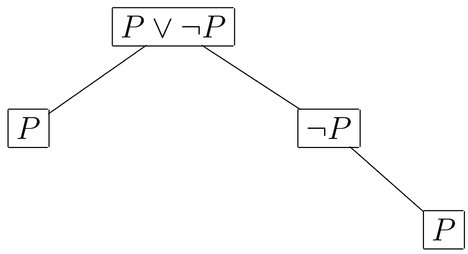
Bir önerme formülünde, birden fazla bağlayıcı kullanılabilir, mesela

$$P \vee \neg P$$

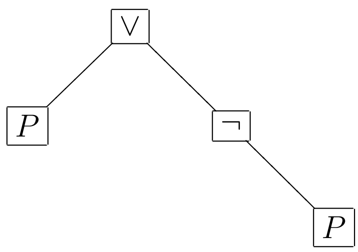
formülünde olduğu gibi. Bu formülün, üç veya dört tane **altformülü** var; bunlar

$$P \vee \neg P, \qquad P, \qquad \neg P, \qquad P$$

formülleridir. Biz, P altformülünü tekrarladık, çünkü formülü bir **ağaç** şeklinde görebiliriz, ve bu ağacın dört tane **düğümü** olur:



Ağaçta, altformülün yerine, formülün **ana bağlayıcısını** koyabiliriz:



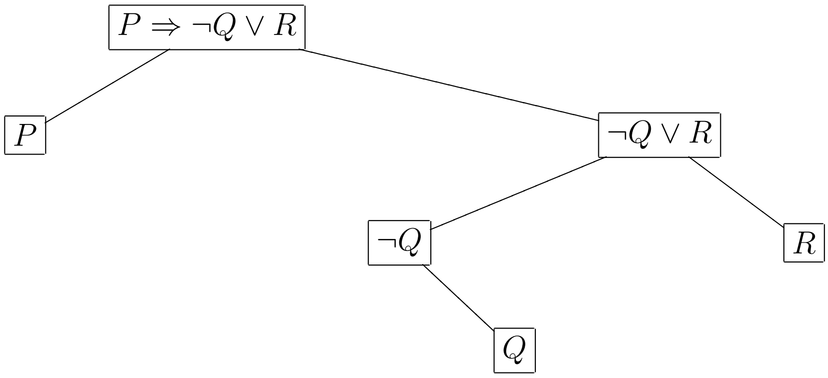
O zaman $P \vee \neg P$ formülün doğruluk tablosu iki şekilde yazılabilir:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0	1	1
1	0	1

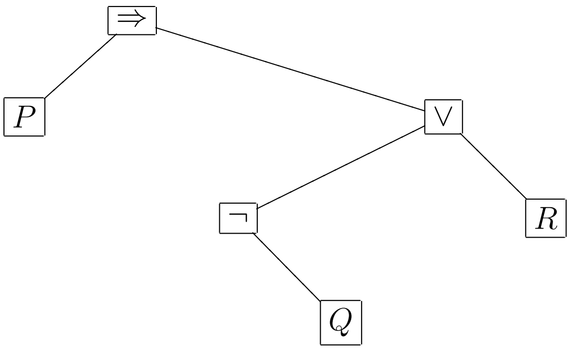
P	$\vee$	$\neg$	P
0	1	1	0
1	1	0	1

İkinci şekilde, her altformülün değeri, altformülün ana bağlayıcısının altına yazılır.

Bir örnek daha: $P \Rightarrow \neg Q \vee R$ (yani, $P \Rightarrow ((\neg Q) \vee R)$) önerme formülünün ağacı aşağıdadır:



Ana bağlayıcıları kullanarak,



şeklinde yazabiliriz. Doğruluk tablosu şöyle yazılabilir:

P	$\Rightarrow$	$\neg$	Q	$\vee$	R
0			0		0
1			0		0
0			1		0
1			1		0
0			0		1
1			0		1
0			1		1
1			1		1

,

P	$\Rightarrow$	$\neg$	Q	$\vee$	R
0		1	0		0
1		1	0		0
0		0	1		0
1		0	1		0
0		1	0		1
1		1	0		1
0		0	1		1
1		0	1		1

,

P	$\Rightarrow$	$\neg$	Q	$\vee$	R
0		1	0	1	0
1		1	0	1	0
0		0	1	0	0
1		0	1	0	0
0		1	0	1	1
1		1	0	1	1
0		0	1	1	1
1		0	1	1	1

,

ve sonunda,

P	$\Rightarrow$	$\neg$	Q	$\vee$	R
0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

.

O zaman formülün **basit** doğruluk tablosu şöyledir:

P	Q	R	$P \Rightarrow \neg Q \vee R$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Genellikle doğruluk değerleri şu sırada hesaplanır:

1. $\neg$
2. $\wedge$ ve $\vee$
3. $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$
4. bir bağlayıcı iki kere kullanılmışsa, sağdaki.

Örneğin:

1. $P \Rightarrow Q \vee R$ demek $P \Rightarrow (Q \vee R)$;
2. $\neg P \wedge Q$ demek $(\neg P) \wedge Q$;
3. $P \wedge Q \vee R$ belirsiz;
4. $P \wedge Q \wedge R$ demek $P \wedge (Q \wedge R)$;
5. $P \wedge Q \wedge R \vee P$ belirsiz;
6. $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ demek $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$;
7. $P \Rightarrow Q \wedge R \Rightarrow S$ demek $P \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$.

$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına **ikili** denir; $\neg$ bağlayıcısına, **birli** denir. Ayrıca, 0 ve 1, **sıfırlı bağlayıcılar** olarak düşünülebilir.

Alıştırma 1. Aşağıdaki formülleri hesaplayın.

1. $1 \Rightarrow 1 \Rightarrow 1$,
2. $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$,

3. $(0 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$,
4. $(0 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow 1)$,
5. $\neg\neg\neg 0$,
6. $(1 \vee 0) \wedge 0$,
7. $1 \vee (0 \wedge 0)$.

Alıştırma 2. Aşağıdaki formüllerin doğruluk tablolarını yapın:

1. $P \Rightarrow Q \Rightarrow P$;
2. $P \wedge Q \wedge R$;
3. $\neg(P \Leftrightarrow \neg(Q \Leftrightarrow R))$;
4. $(P \Rightarrow Q \vee R) \Rightarrow \neg P \vee Q$;
5. $(P \Rightarrow Q \vee \neg R) \wedge (Q \Rightarrow P \wedge R) \Rightarrow P \Rightarrow R$;
6. $\neg(\neg R \Rightarrow P \Rightarrow \neg(R \Rightarrow Q))$.

3 Eşdeğerlik

İki önermenin doğruluk değeri her durumda aynıysa, o önermeler, mantıksal olarak **eşdeğer** veya **denktir.** İki önerme *formülünün basit* doğruluk tabloları aynıysa, o formülleri de birbirine **eşdeğer** veya **denktir.** F ve G önerme formülleri eşdeğer ise,

$$F \sim G$$

ifadesini yazalım. Örneğin,

$$P \Rightarrow Q \sim \neg P \vee Q$$

denkliğini aşağıdaki tablolardan görebiliriz:

P	$\Rightarrow$	Q
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

$\neg$	P	$\vee$	Q
1	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1

Buradan basit doğruluk tablolarının aynı olduğunu görürüz:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

P	Q	$\neg P \vee Q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Teorem 1. *Aşağıdaki eşdeğerliklerimiz vardır.*

1. *(Her önerme, sadece $\neg$ ve $\wedge$ ile yazılabilir:)*

$$\begin{aligned} P \vee Q &\sim \neg(\neg P \wedge \neg Q), \\ P \Rightarrow Q &\sim \neg P \vee Q, \\ P \Leftrightarrow Q &\sim (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P). \end{aligned}$$

2. *(Her önerme, sadece $\neg$ ve $\Rightarrow$ ile yazılabilir:)*

$$P \wedge Q \sim \neg(P \Rightarrow \neg Q).$$

3. *(Çifte değilleme kaldırılabilir:)*

$$\neg\neg P \sim P.$$

4. *(De Morgan[‡] kuralları:)*

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\sim \neg P \wedge \neg Q, \\ \neg(P \wedge Q) &\sim \neg P \vee \neg Q. \end{aligned}$$

5. *($\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarının değişme ve birleşme özellikleri:)*

$$\begin{aligned} P \wedge Q &\sim Q \wedge P, & (P \wedge Q) \wedge R &\sim P \wedge (Q \wedge R), \\ P \vee Q &\sim Q \vee P, & (P \vee Q) \vee R &\sim P \vee (Q \vee R). \end{aligned}$$

6. *($\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcıları birbirine üzerine dağılır:)*

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\sim (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) &\sim (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \end{aligned}$$

7. *(Fazlalıklar:)*

$$\begin{aligned} P \wedge P &\sim P, & P \wedge \neg P &\sim 0, & P \wedge 1 &\sim P, & P \wedge 0 &\sim 0, \\ P \vee P &\sim P, & P \vee \neg P &\sim 1, & P \vee 0 &\sim P, & P \vee 1 &\sim 1. \end{aligned}$$

8. *(Yeni değişken:)*

$$\begin{aligned} P &\sim (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q), \\ P &\sim (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q). \end{aligned}$$

9. *(Yutma:)*

$$\begin{aligned} P \wedge (P \vee Q) &\sim P, \\ P \vee (P \wedge Q) &\sim P. \end{aligned}$$

Kanıt. Alıştırma. □

[‡] Augustus De Morgan, 1806–71, Büyük Britanyalı matematikçi ve mantıkçı [6, 5].

4 Gerektirme

Bir durum, bir önermeler kümesinin **modelidir,** eğer o durumda, kümenin her önermesi doğru ise. Eğer bir önerme, bir önermeler kümesinin her modelinde doğru ise, o küme, önermeyi **gerektirir.**

Γ (yani, *Gamma*), bir önerme formülü kümesi olsun, ve F, bir önerme formülü olsun. Eğer $\Gamma \cup \{F\}$ kümesindeki bütün formüllerin doğruluk tablosunun her satırında,

1. ya Γ kümesindeki bir formül yanlış ise,
2. ya da F formülü doğru ise,

o zaman Γ, F formülünü **gerektirir** deriz, ve

$$\Gamma \models F$$

ifadesini yazarız; $\models$ simgesine, **turnike** denebilir. Boş küme, F formülünü gerektirirse,

$$\models F$$

yazılabilir, ve F formülüne **doğrusal geçerli formül,** veya **mantıksal doğru formül,** veya **totoloji** denebilir.

Teorem 2. *$F \sim G$ ancak ve ancak $F \Leftrightarrow G$ bir totolojidir.*

Kanıt. Alıştırma. □

Γ kümesinin F formülünü gerektirdiğini nasıl gösterebiliriz? İki yöntemimiz var:

1. doğruluk tabloları,
2. *biçimsel kanıt.*

Mesela, aşağıdaki tabloya bakın:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q
0	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Her satırda,

- ya $d(P \Rightarrow Q) = 0$ veya $d(P) = 0$,
- ya da $d(Q) = 1$.

O zaman
$$P \Rightarrow Q, P \models Q \tag{$*$}$$
(yani, $\{P \Rightarrow Q, P\} \models Q$).

Aynı şekilde,
$$P \lor Q \lor R, P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \models R, \tag{$\dagger$}$$
çünkü, aşağıdaki doğruluk tablosundaki her satırda,

- ya $d(P \lor Q \lor R) = 0$, veya $d(P \Rightarrow Q) = 0$, veya $d(Q \Rightarrow R) = 0$,
- ya da $R = 1$.

(İkisi de olabilir, 6. satırdaki gibi.)

P	Q	R	$P \lor Q \lor R$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	R
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ama şimdi
$$\Gamma = \{\neg(S \land T), (R \land Q) \lor (T \land Q), P \lor (S \land \neg T), \neg T \lor (Q \land (S \lor R)), \neg R \lor T\}$$
olsun. O zaman
$$\Gamma \models P \land Q \land R \land \neg S \land T; \tag{$\ddagger$}$$
ama bunu doğruluk tablolarıyla göstermek sıkıcı olurdu. *Biçimsel kanıt* yöntemi, bu durumda hem daha kısa, hem daha ilginçtir.

Biçimsel kanıt, bir formüller listesidir. $F_0, F_1, \dots, F_n$, bir biçimsel kanıt olsun. Her k için, $0 \leqslant k \leqslant n$ ise,

1. ya F_k, bilinen bir totolojidir,
2. ya bilinen bir gerektirmesine göre, $\{F_0, \dots, F_{k-1}\} \models F_k$,
3. ya da F_k, biçimsel kanıtın bir **hipotezidir.**

Kanıtın **sonucu,** F_n önerme formülüdür. Kanıtın hipotezleri, Γ kümesini oluştursun. O zaman Γ, F_n formülünü gerektirir:
$$\Gamma \models F_n.$$
Biçimsel kanıt, Γ'dan F_n formülünü kanıtlar.

Bilinen bir totolojiye **aksiyom** denir. Başlangıçta, aksiyom olarak,

$$1, \qquad\qquad P \lor \neg P$$

formüllerini, ve daha genellikle her $F \vee \neg F$ formülünü, kullanabiliriz. Başka bir formülü aksiyom olarak kullanmak istersek, kullanabiliriz, ama önce onun totoloji olduğunu ispatlamalıyız (mesela, doğruluk tablosuyla).

Bilinen bir gerektirmeye, **çıkarım kuralı** denir. Mesela, zaten (∗) satırından

$$P \Rightarrow Q, P \models Q$$

gerektirmesini biliyoruz. O zaman, çıkarım kuralı olarak, **ayırma kuralımız**[§] var, yani: $P \Rightarrow Q$ ve P formüllerinden, Q çıkar. Daha genel olarak, $F \Rightarrow G$ ve F formüllerinden, G çıkar. Hatta daha genel olarak, $F \Rightarrow G$ ve F formülleri, Γ kümesinin öğeleriyse, Γ kümesinden G çıkar.

Ayrıca, $F \sim G$ ise, o zaman

$$F \models G.$$

Teorem 1'den, bilinen denkliklerimiz var. O zaman şu çıkarım kuralımız var: Teorem 1'e göre, $F \sim G$ ise, ve F, Γ kümesinin öğesiyse, o zaman G, Γ'dan çıkar.

Örneğin, $P \wedge Q \models Q$, çünkü biçimsel bir kanıt yazabiliriz:

$$P \wedge Q, \quad 1, \quad \neg P \vee 1, \quad \neg P \vee \neg Q \vee Q, \quad \neg(P \wedge Q) \vee Q, \quad (P \wedge Q) \Rightarrow Q, \quad Q$$

Açıklamalarımızı eklersek:

(1)	$P \wedge Q$	[hipotez]
(2)	1	[aksiyom]
(3)	$\neg P \vee 1$	[2. satırdan, fazlalıkla]
(4)	$\neg P \vee \neg Q \vee Q$	[3. satırdan, fazlalıkla]
(5)	$\neg(P \wedge Q) \vee Q$	[4. satırdan, De Morgan kuralıyla]
(6)	$(P \wedge Q) \Rightarrow Q$	[5. satırdan]
(7)	Q	[1 & 6 satırından ayırma]

Ayrıca,

$$P \vee Q \vee R, \neg P, \neg Q \models R,$$

çünkü biçimsel bir kanıt yazabiliriz:

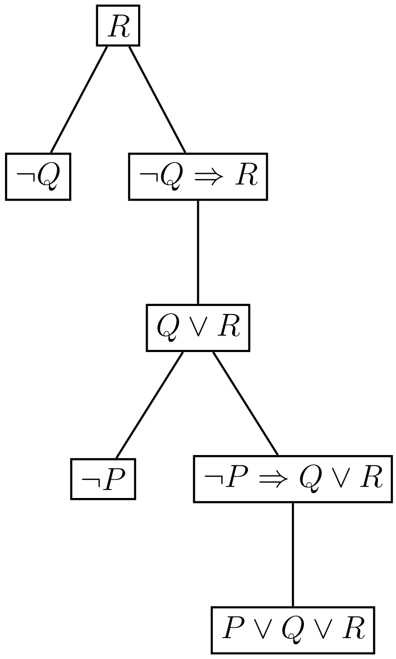
$$P \vee Q \vee R, \quad \neg P \Rightarrow Q \vee R, \quad \neg P, \quad Q \vee R, \quad \neg Q \Rightarrow R, \quad \neg Q, \quad R.$$

Açıklamalarımızı eklersek:

(1)	$P \vee Q \vee R$	[hipotez]
(2)	$\neg P \Rightarrow Q \vee R$	[1. satırdan]
(3)	$\neg P$	[hipotez]
(4)	$Q \vee R$	[2. ve 3. satırlardan, ayırma kuralıyla]
(5)	$\neg Q \Rightarrow R$	[4. satırdan]
(6)	$\neg Q$	[hipotez]
(7)	R	[5. ve 6. satırlardan]

[§]Bu kural, Latincede ***modus ponens,*** İngilizcede, **detachment.**

Her biçimsel kanıtın arkasında, bir ağaç vardır. Mesela, son kanıtın ağacı şöyle:



Bu biçimsel kanıtın sıralanmasını değiştirebiliriz; örneğin, şöyle yazabiliriz:

$$\neg Q, \qquad P \lor Q \lor R, \qquad \neg P, \qquad \neg P \Rightarrow Q \lor R, \qquad Q \lor R, \qquad \neg Q \Rightarrow R, \qquad R.$$

Yeni çıkarım kuralları aşağıdaki teoremden gelir:

Teorem 3. *Bu gerektirmelerimiz var:*

1. *(Basitleştirme:)*

$$P \land Q \models P, \qquad P \land Q \models Q.$$

2. *(Ekleme:)*

$$P \models P \lor Q, \qquad Q \models P \lor Q.$$

3. *(Bağlama:)*

$$P, Q \models P \land Q.$$

4. *(Ayırma:)*

$$\begin{aligned} P, P \Rightarrow Q &\models Q, & P \lor Q, \neg P &\models Q, \\ \neg Q, P \Rightarrow Q &\models \neg P, & P \lor Q, \neg Q &\models P. \end{aligned}$$

(hipotetik tasım:)

$$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \models P \Rightarrow R.$$

5. *(Olumlu dilemma:)*
$$P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S, P \vee R \models Q \vee S.$$

Kanıt. Alıştırma. □

Şimdi yukarıdaki (†) gerektirmesininin bu biçimsel kanıdı var (her satırın nedeni nedir?):

$P \vee Q \vee R$	[hipotez]
$(P \vee Q) \vee R$	
$\neg(P \vee Q) \Rightarrow R$	
$P \Rightarrow Q$	[hipotez]
$Q \Rightarrow R$	[hipotez]
$P \Rightarrow R$	
$P \vee Q \Rightarrow R \vee R$	
$P \vee Q \Rightarrow R$	
$(P \vee Q) \vee \neg(P \vee Q) \Rightarrow R \vee R$	
$(P \vee Q) \vee \neg(P \vee Q)$	
$R \vee R$	
$R.$	

Ayrıca, yukarıdaki (‡) gerektirmesinin, Tablo 1'deki biçimsel kanıtı var.

Alıştırma 3. Aşağıdaki gerektirmeler için biçimsel kanıtları yazın.

1. $\models P \Rightarrow P \Rightarrow P$
2. $\models P \Rightarrow Q \Rightarrow P$
3. $\models P \vee (P \Rightarrow Q)$
4. $\models (P \Rightarrow Q) \vee \neg Q$
5. $P \Rightarrow Q \wedge R \models P \Rightarrow Q$
6. $P \wedge \neg P \models Q$
7. $P \wedge (Q \vee R) \models P \Leftrightarrow (\neg Q \vee P)$
8. $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \models \neg Q$
9. $P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R \models P \vee Q \Rightarrow R$
10. $P \Rightarrow R, Q \Rightarrow S \models P \vee Q \Rightarrow R \vee S$

$(R \wedge Q) \vee (T \wedge Q)$	
$(R \vee T) \wedge Q$	$\neg S \wedge T$
Q	$P \vee (S \wedge \neg T)$
$R \vee T$	$\neg S \vee \neg\neg T$
$\neg R \vee T$	$\neg(S \wedge \neg T)$
$(R \vee T) \wedge (\neg R \vee T)$	P
$(R \wedge \neg R) \vee T$	$\neg T \vee (Q \wedge (S \vee R))$
$1 \vee T$	$Q \wedge (S \vee R)$
T	$S \vee R$
$\neg(S \wedge T)$	R
$\neg S \vee \neg T$	$R \wedge \neg S \wedge T$
$\neg\neg T$	$Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$
$\neg S$	$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$

Tablo 1: Biçimsel bir kanıt

Kaynaklar

[1] Stanley N. Burris, *Logic for mathematics and computer science*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1998.

[2] Abdurrahman Demirtaş, *Matematik sözlüğü*, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[3] Teo Grünberg and Adnan Onart, *Mantık terimleri sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[4] Ali Nesin, *Önermeler mantığı*, Bilgi Üniversitesi Yayınları, Ekim 2001.

[5] Dirk Struik, *Kısa matematik tarihi*, Sarmal Yayınevi, İstanbul, 1996, Türkçesi: Yıldız Silier.

[6] Dirk J. Struik, *A concise history of modern mathematics*, fourth revised ed., Dover, New York, 1987.