Toplama'nın Yedinci Kitabı'nda Öklid'in *Porizmalar*'ı İçin 38 Lemmadan İlk 19 Lemma

İskenderiyeli Pappus
Çeviren: David Pierce

29 Eylül 2015
redaksiyon yapılmış 2 Eylül 2016

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
http://mat.msgsu.edu.tr/

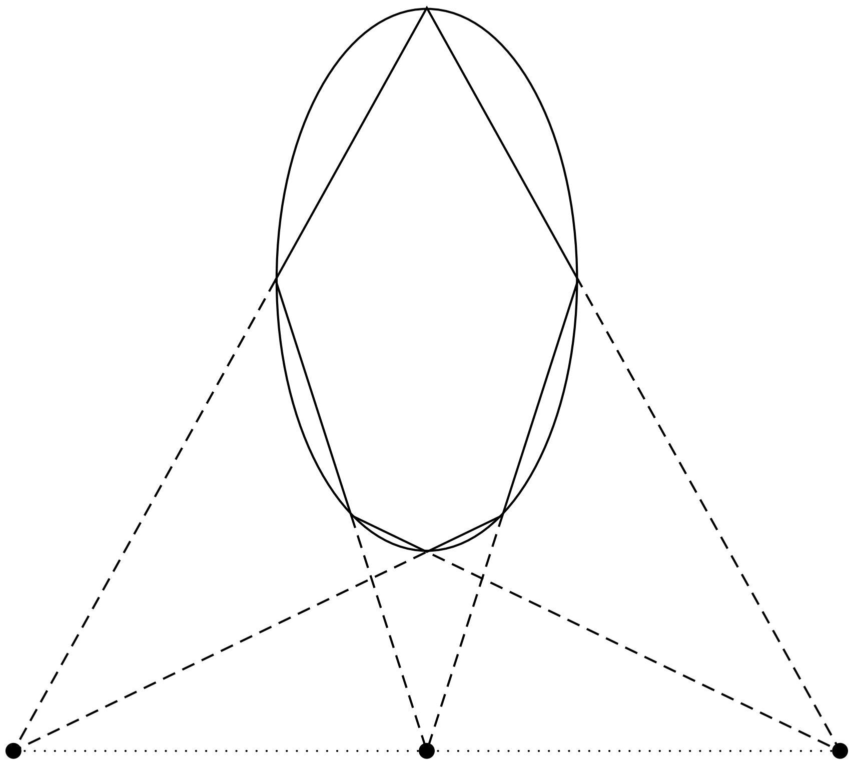
dpierce@msgsu.edu.tr

İçindekiler

Giriş

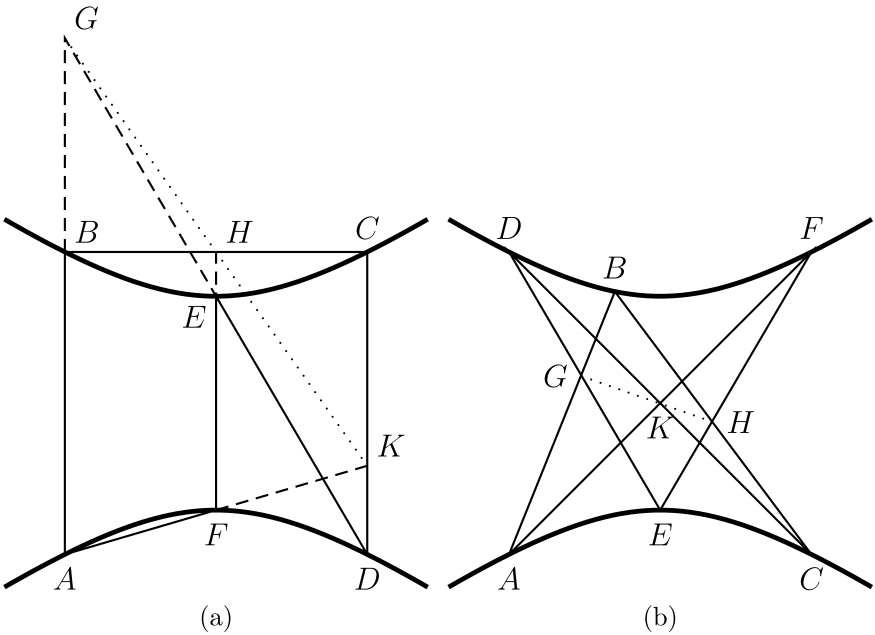
Pascal Teoremi

Bir altıgenin köşeleri bir koni kesitindeyse, altıgenin kenarları Şekil 1'deki gibi uzatılınca, karşı kenarların kesişim noktaları bir doğ-



Şekil 1: Elipste Altıgen Teoremi

rudadır. Altıgen dışbükey olmayabilir; kenarların kendileri zaten kesişebilir. Örneğin Şekil 2'nin her şıkkında A, B, C, D, E, ve



Şekil 2: Hiperbolde Altıgen Teoremi

F noktaları bir hiperbolün dallarındadır, ve (sonuç olarak) G, H, ve K bir doğrudadır. Bu sonuç, **Altıgen Teoremi** veya **Pascal Teoremi'dir:** 1640 yılında, 16 yaşında, Blaise Pascal bu teoremi bildirdi. (Pascal'in Fransızcası, [18] kaynağındadır; İngilizce çevirisi, [15, s. 326–30] ve [17, s. 163–8] kaynaklarındadır.)

Pascal Teoremi'nde, iki paralel doğru *sonsuzdaki noktada* kesişen olarak sayılır. Örneğin Şekil 2'de, AB ve DE birbirine paralel ise, o zaman HK de onlara paraleldir.

Pappus Teoremi

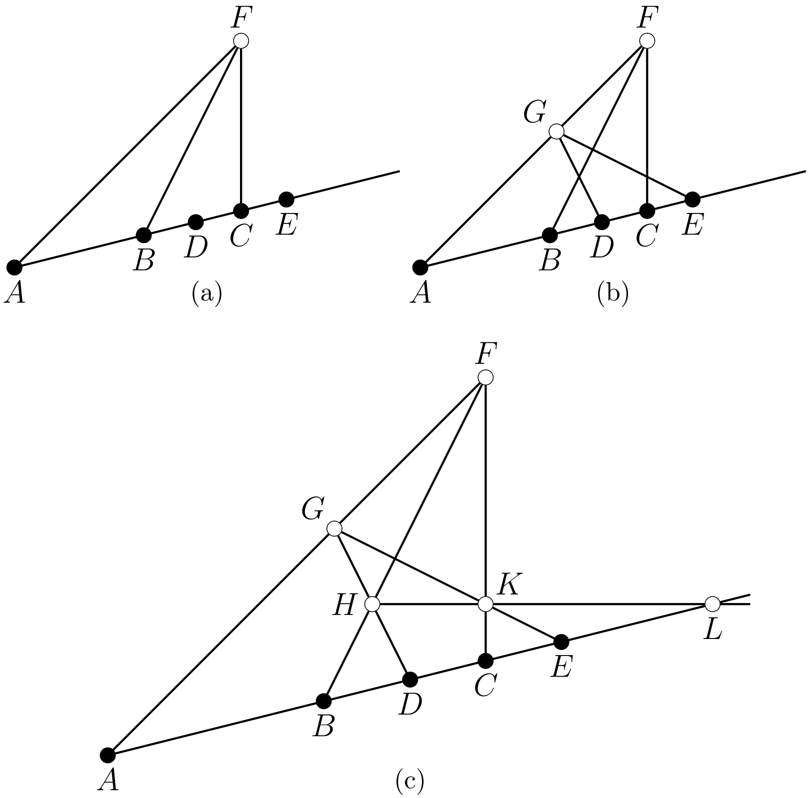
Pascal Teoremi'nde de iki doğru, bir koni kesiti olarak sayılır. Örneğin Şekil 2'nin (b) şıkkında, AEC ve DBF doğru olabilir. Teoremin bu durumu, **Pappus Teoremi'dir.** Şekil 2'nin (a) şıkkında, AFD ve BEC doğru ise, teorem aşikârdır.

M.S. 300 yılı civarında, *Toplama* (Συναγωγή, *Collection*) adlı eserinde İskenderiyeli Pappus, adının verileceği teoremini kanıtladı. *Toplama*'nın sekiz kitabı vardır. Yedinci kitabı, *Analiz Hazinesi* (Αναλυόμενος τόπος, *Treasury of Analysis*) adlı eserler için bir rehberdir. Pappus'a göre [20, s. 598–601], *Hazine*'nin içindekiler, sayfa 64'teki gibidir. Apollonius'un *Koni Kesitleri* ve Öklid'in *Veriler*'i hariç, *Hazine*'nin çoğu şimdi kaybolmuştur. Özel olarak Öklid'in *Porizmalar*'ı kaybolmuştur. Ama bu eserin okunmasına yardımcı olmak için, Pappus 38 lemmayı verir. Bunların ilk 19'nun çevirisi aşağıdadır. Pappus Altıgen Teoremi'nin bazı durumları, Lemma VIII, XII, ve XIII'tür. Pappus, bugünkü kendisinin adını alan teoremin her durumunu kanıtlamaz, ama kanıtladığı durumların kanıtları, Lemma III, X, ve XI'i kullanır.

Proklus'a göre ([14, s. 236] veya [19, s. 478–81] kaynaklarında), **porizma** sözcüğünün iki anlamı vardır. Porizmanın birinci anlamı, kanıtının başka bir önermenin kanıtından kolayca çıktığı bir önermedir. Örneğin Öklid'in *Öğeler* Kitap VII'nin Önerme 2'si, birbirine asal olmayan iki sayının en büyük ortak bölenini bulma problemidir. Problemin çözümünden, sayıların her ortak böleninin en büyük ortak bölenini böldüğü porizma çıkar.

Porizma sözcüğünün ikinci anlamına göre bir porizma, teorem ve problemin arasındadır. Örneğin verilen açıyı ikiye bölmek bir problemdir, ama dairenin merkezini bulmak bir porizmadır, çünkü bulunmadan önce, dairenin merkezinin var olduğu bilinir.

Dört tane nokta verilirse, altı tane doğru noktaların ikisinden geçer. Bu doğruların verilen bir doğruyu nasıl kestiği, Pappus'un Lemma I, II, IV, V, VI, ve VII'sinin konusudur. Örneğin Şekil 3'te A, B, C, D, ve E noktaları bir doğruda olsun.



Şekil 3: Tam dörtkenar teoremi

(a) Rasgele F noktası seçilsin, ve FA, FB, ve FC doğruları birleştirilsin.

(b) AF doğrusunda rastgele G noktası seçilsin, ve GD ve GE doğruları birleştirilsin.

(c) Sırasıyla FB ve FC'yi H ve K'de kesince, HK doğrusu birleştirilsin ve AB'yi L'de kessin.

O zaman Pappus'un gösterdiğine göre L noktası, F ve G noktalarının seçiminden bağımsızdır.

Aşağıdaki lemmalarda, Pappus sık sık orantıları kullanır. Bunların kuramı şimdi özetlenecektir.

Büyüklükler ve katları

Öklid için "eşit" (ἴσος), "aynı" (αὐτός) değildir. İki farklı sınırlanmış doğru birbirine eşit olabilir. Eşitlik hâlâ bir *denklik bağıntısıdır.* Sınırlanmış bir doğrunun **uzunluğu,** doğrunun eşitlik sınıfı olarak tanımlanabilir. Benzer şekilde bir figürün **alanı,** figürün eşitlik sınıfı olarak tanımlanabilir.

Eğer AB ve $\mathsf{\Gamma\Delta}$ doğru ise, genişliği AB'nın uzunluğu olan ve yüksekliği $\mathsf{\Gamma\Delta}$'nın uzunluğu olan bir dikdörtgen inşa edilebilir, ve bu dikdörtgeni

$$\mathsf{AB} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta}$$

ifadesiyle yazacağız; Pappus

τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ

("AB ve $\mathsf{\Gamma\Delta}$ altındaki") ifadesini kullanıyor.

Oranların soyut kuramı, *Öğeler*'in beşinci kitabındadır. Öklid'in tanımladığı her oranı, pozitif gerçel sayı olarak görebiliriz (ama tersi yanlış olabilir).

Bir AB doğrusunun, bir $\mathsf{\Gamma\Delta}$ doğrusuna oranı vardır. Bu oranı

$$\mathsf{AB} : \mathsf{\Gamma\Delta}$$

olarak yazacağız; Pappus

λόγος ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ

("AB'nın $\mathsf{\Gamma\Delta}$'ya oranı," *ratio that AB has to ΓΔ*) ifadesini kullanıyor.

Aynı şekilde bir $\mathsf{AB} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta}$ dikdörtgenin, bir $\mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta}$ dikdörtgenine oranı vardır. Bu oranı

$$\mathsf{AB} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta}$$

olarak yazacağız.

Her sınırlanmış doğru veya figür, bir **büyüklüktür** (τὸ μεγέθος). (Cisimler de büyüklüktürler.) Aslında Öklid, iki büyüklüğün oranını (ὁ λόγος) tanımlamaz, ama iki oranın aynılığını (ἀνάλογον) tanımlar. Tanım aşağıdaki gibidir.

Bir büyüklüğün **katı** (πολλαπλάσιον) alınabilir. Örneğin A bir büyüklük ise, katları

$$\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A},$$

ve sairedir. Bunlar A, $2\mathsf{A}$, $3\mathsf{A}$, ve saire olarak yazılabilir. A gibi büyüklüktürler. Aslında A'nın herhangi bir katı

$$k\mathsf{A}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki k katsayısı, doğal sayıdır. Doğal sayıların oluşturduğu küme

$$\mathbb{N}$$

olarak yazılabilir. (Bizim için sıfır, doğal sayı değildir.) k'nın doğal sayı olduğunu göstermek için

$$k \in \mathbb{N}$$

ifadesini yazarız; ama Öklid bunun gibi bir ifade kullanmaz. Öklid için, k ifademiz isim değil, sıfat olurdu. Aslında *Öğeler*'in yedinci kitabındaki tanıma göre bir sayı (ὁ ἀριθμός), birimlerin (τὰ μονάδα) oluşturduğu bir çokluktur (τὸ πλῆθος). Bu tanıma göre bir $k\mathsf{A}$ katının kendisi bir sayıdır. Öklid için eğer B A'ya eşit olmayan bir büyüklük ise, o zaman $k\mathsf{A}$ ve $k\mathsf{B}$ büyüklük olarak birbirine eşit değildir, ama **kat olarak birbirine eşittir,** yani **eşit katlardır** (ἰσάκις πολλαπλασία).

Oranlar ve orantılılık

Herhangi A ve B büyüklükleri karşılaştırabilir: A B'dan büyük veya küçük olabilir, ve (büyüklük olarak) ikisi birbirine eşit olabilir.

Sırasıyla

$$\mathsf{A} > \mathsf{B}, \qquad \mathsf{A} < \mathsf{B}, \qquad \mathsf{A} = \mathsf{B}$$

ifadelerini yazarız. İki büyüklüğün her biri doğru veya her biri figür ise, o zaman varsayıma göre büyüklüklerin her birinin bir katı, öteki büyüklükten büyüktür. Bu varsayıma **Arşimet Aksiyomu** denir, çünkü Arşimet onu yazıp kullandı [1, s. 36]; ama Arşimet'ten önce Öklid onu kullandı. Öklid, M.Ö. 300 civarında çalışıyordu; Arşimet, M.Ö. 212 yılında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasında öldürüldü.

Eğer iki büyüklük Arşimet Aksiyomunu sağlarsa, **büyüklüklerin oranı vardır.** Bu şekilde A ve B'nın oranı vardır ancak ve ancak bir k doğal sayısı için $k\mathsf{A} > \mathsf{B}$ ve $\mathsf{A} < k\mathsf{B}$.

Şimdi dört tane büyüklük alınsın. Bunlardan birincinin ve ikincinin oranı olsun; üçüncünün ve dördüncünün de oranı olsun. Büyüklüklerden birincinin ve üçüncünün herhangi eşit katı ve ikincinin ve dördüncünün herhangi eşit katı alınınca, eğer birincinin ve üçüncünün katları sırasıyla aynı zamanda (1) ya ikincinin ve dördüncünün katlarından büyük, (2) ya ikincinin ve dördüncünün katlarına eşit, (3) ya da ikincinin ve dördüncünün katlarından küçük ise, o zaman Öklid'in tanımına göre birincinin ikincine **oranı,** üçüncünün dördüncüne **oranıyla aynıdır,** ve dört büyüklük **orantılıdır.**

Aslında büyüklükler A, B, Γ, ve Δ olsun. Eğer herhangi k ve m doğal sayıları için

$$\begin{aligned} k\mathsf{A} > m\mathsf{B} &\iff k\Gamma > m\Delta, \\ k\mathsf{A} = m\mathsf{B} &\iff k\Gamma = m\Delta, \\ k\mathsf{A} < m\mathsf{B} &\iff k\Gamma < m\Delta \end{aligned}$$

denklikleri doğru ise, o zaman A, B, Γ, ve Δ orantılıdır, ve $\mathsf{A} : \mathsf{B}$ ve $\Gamma : \Delta$ oranları birbiriyle aynıdır. Bu durumda

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} :: \Gamma : \Delta$$

ifadesini yazarız. Öklid ve Pappus sadece sözler kullanırlar. Örneğin AB'nın ΓΔ'ya oranı, EZ · HΘ'nın KΛ · MN'ye oranıyla aynıysa

$$\mathsf{AB} : \mathsf{\Gamma\Delta} :: \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta} : \mathsf{K\Lambda} \cdot \mathsf{MN}$$

ifadesini yazacağız, ama Pappus

ὡς ἡ AB πρὸς ἡ ΓΔ,
οὕτως τὸ ὑπὸ EZ HΘ πρὸς τὸ ὑπὸ KΛ MN

yazıyor. (Pappus'un metnini bulunduğumuz el yazmasında, kısaltmalar kullanılır, ama matematik kavramları değil, sadece sözcükler için [13, p. 28].)

Herhangi A, B, Γ, ve Δ büyüklükleri için

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} :: \Gamma : \Delta$$

olsun. Oranların aynılığı bir denklik bağıntısı olunca

$$\Gamma : \Delta :: \mathsf{A} : \mathsf{B}$$

da doğrudur. *Öğeler* Kitap V'e göre

- **tersine** (ἀνάπαλιν) $\mathsf{B} : \mathsf{A} :: \Delta : \Gamma$,
- **toplamayla** (συνθέντι) $\mathsf{A} + \mathsf{B} : \mathsf{B} :: \Gamma + \Delta : \Delta$,
- **çevirmeyle** (ἀναστρέψαντί) $\mathsf{A} - \mathsf{B} : \mathsf{B} :: \Gamma - \Delta : \Delta$ (burada $\mathsf{A} > \mathsf{B}$ olmalı),
- **izlemeyle** (ἐναλλάξ) $\mathsf{A} : \Gamma :: \mathsf{B} : \Delta$ (burada A'nın Γ'ya ve B'nın Δ'ya oranı var olmalı).

Ayrıca, eğer $\mathsf{A} : \mathsf{B} :: \Delta : \mathsf{E}$ ve $\mathsf{B} : \Gamma :: \mathsf{E} : \mathsf{Z}$ ise, o zaman **eşitlikten** (δι' ἴσου)

$$\mathsf{A} : \mathsf{E} :: \Gamma : \mathsf{Z}.$$

Daha genelde, eğer $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n$ ve $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{B}_n$ büyüklükleri verilirse, ve her durumda

$$\mathsf{A}_k : \mathsf{A}_{k+1} :: \mathsf{B}_k : \mathsf{B}_{k+1}$$

ise, o zaman eşitlikten

$$\mathsf{A}_1 : \mathsf{A}_n :: \mathsf{B}_1 : \mathsf{B}_n;$$

herhalde Öklid "eşitlikten" diyor çünkü çokluklar olarak A_k'lerin ve B_k'lerin sayıları birbirine eşittir.

Şimdi A, B, ve Γ doğru olsun. O zaman *Öğeler* Kitap VI'nın Önerme 1'ine göre

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} :: \mathsf{A} \cdot \Gamma : \mathsf{B} \cdot \Gamma.$$

Ayrıca, tanıma göre $\mathsf{A} : \mathsf{B}$ ve $\mathsf{B} : \Gamma$ oranlarının **bileşimi** (συνημμένος, συνάπτω fiilinden), $\mathsf{A} : \Gamma$ oranıdır, ama bu tanım *Öğeler*'de değildir. Eğer $\mathsf{B} : \Gamma :: \Delta : \mathsf{E}$ ise, o zaman $\mathsf{A} : \Gamma$ oranı, $\mathsf{A} : \mathsf{B}$ ve $\Delta : \mathsf{E}$ oranlarının bileşimiyle aynıdır. Bu orantıyı

$$\mathsf{A} : \Gamma :: \mathsf{A} : \mathsf{B} \;\;\&\;\; \Delta : \mathsf{E}$$

biçiminde yazacağız. Örneğin aşağıdaki Lemma I'de Pappus

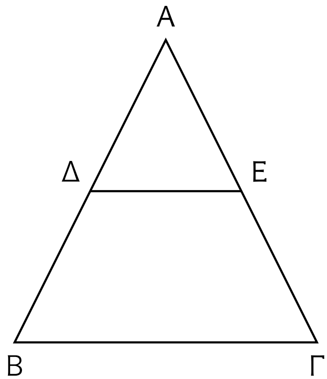
ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆται
ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ
καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΗ

orantısını yazıyor; bunu

$$\mathsf{A}\Delta : \Delta\mathsf{Z} :: \mathsf{AB} : \mathsf{BE} \;\;\&\;\; \mathsf{E}\Theta : \Theta\mathsf{H}$$

olarak yazacağız. Lemma III'te Pappus

τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆται λόγος
ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ
καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ



Şekil 4: *Öğeler* VI.2

orantısını yazıyor; bunu

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta E : EZ \ \ \&\ \ ZH : H\Theta}$$

olarak yazacağız.

Son olarak, Şekil 4'te, eğer ΔΕ ΒΓ'ya paralel ise, o zaman

$$\mathsf{B\Delta : \Delta A :: \Gamma E : EA;}$$

ve tersi de doğrudur. Bu sonuç, *Öğeler* Kitap VI'nın Önerme 2'sidir.

Pappus çevirisi hakkında

Aşağıdaki çeviri için Hultsch'un [12] edisyonunu kullandım. Sadece bittikten sonra Jones'un [13] edisyonunu bulup onunla yaptığımı düzelttim.

Hultsch, *Toplama* Kitap VII'nin tüm önermelerine Arap rakamları koyar, ve oradaki Öklid'in *Porizmalar*'ı hakkındaki lemmalara Romen rakamları koyar. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Pappus, oran ve orantılar için özel işaretler kullanmaz. Ayrıca şekillerinde tüm çizgilerin kalınlığı aynıdır. Lemmaların kanıtlarını "*Kanıt*" ve □ arasında yazıyorum; Pappus bunun gibi ifadeler kullanmaz.

Pappus'un *Toplama*'sının Yedinci Kitabı'nda Öklid'in *Porizmalar*'ı İçin 38 Lemmasından İlk 19 Lemma

Lemma I (Önerme 127)

Diyagram ΑΒΓΔΕΖΗ olsun (Ἔστω καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ), ve

$$\mathsf{AZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma}$$

olsun, ve ΘΚ birleştirilmiş olsun. O zaman

ΘΚ, ΑΓ'ya paraleldir.

Kanıt. Ζ'dan ΒΔ'ya paralel olan ΖΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{AZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma}$$

olduğundan tersine ve toplamayla ve izlemeyle (ve parallellerden)

$$\underbrace{\mathsf{\Delta A} : \mathsf{AZ}}_{\mathsf{BA} : \mathsf{A\Lambda}} :: \mathsf{\Gamma A} : \mathsf{AH}.$$

Böylece

ΛΗ, ΒΓ'ya paraleldir.

Böylece (paralellerden)

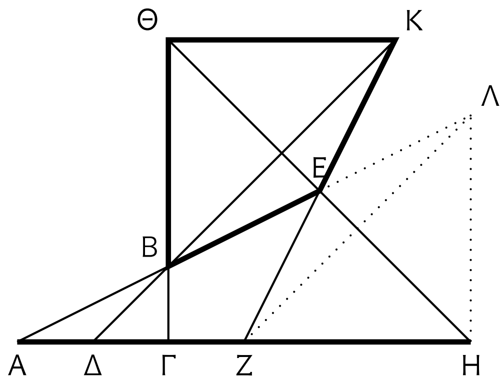
$$\mathsf{EB} : \mathsf{B\Lambda} :: \begin{cases} \mathsf{EK} : \mathsf{KZ} \\ \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H}. \end{cases}$$

Böylece

$$\mathsf{EK} : \mathsf{KZ} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H}.$$

Böylece

ΘΚ, ΑΓ'ya paraleldir. □



Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$\mathsf{AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma}$$

olduğundan, tersine

$$\mathsf{HZ : ZA :: \Gamma\Delta : \Delta A.}$$

Toplamayla ve izlemeyle ve çevirmeyle

$$\mathsf{A\Delta : \Delta Z :: A\Gamma : \Gamma H.}$$

Ama

$$\mathsf{A\Delta : \Delta Z :: AB : BE} \ \ \& \ \ \mathsf{E\Theta : \Theta H,}$$

böylece

$$\mathsf{AB : BE} \ \ \& \ \ \mathsf{EK : KZ :: AB : BE} \ \ \& \ \ \mathsf{E\Theta : \Theta H.}$$

Ortak AB : BE oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\mathsf{EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.}$$

Böylece

ΘK, AΓ'ya paraleldir. □

Lemma II (Önerme 128)

Diyagram ΑΒΓΔΕΖΗΘ [olsun], ve ΑΖ ΔΒ'ya paralel olsun, ve

$$\mathsf{AE : EZ :: \Gamma H : HZ}$$

[olsun]. O zaman

Θ, Κ, ve Ζ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. Η'dan ΔΕ boyunca ΗΛ ilerletilmiş olsun, ve birleştirilmiş olan ΘΚ Λ'ya uzatılmış olsun.

$$\mathsf{AE : EZ :: \Gamma H : HZ}$$

olduğundan, izlemeyle

$$\mathsf{AE : \Gamma H :: EZ : ZH.}$$

Ayrıca

$$\mathsf{AE : \Gamma H :: E\Theta : H\Lambda}$$

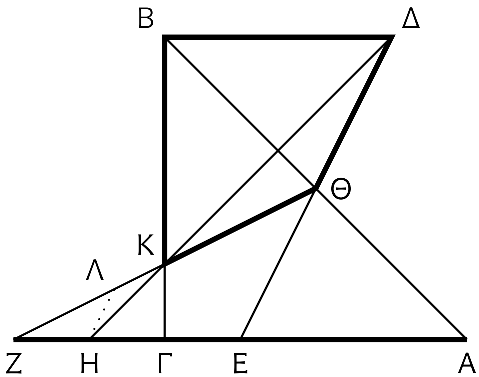
(çünkü iki doğru iki doğruya paralel, ve izlemeyle). Böylece

$$\mathsf{EZ : ZH :: E\Theta : H\Lambda.}$$

Ayrıca ΕΘ ΗΛ'ya paraleldir. Böylece

Θ, Λ, Ζ'dan [geçen çizgi] doğrudur,

yani Θ, Κ, Ζ'dan. □


Β
Δ
Θ
Κ
Λ
Ζ
Η
Γ
Ε
Α

Lemma III (Önerme 129)

Üç doğru AB, $\mathsf{\Gamma A}$, ve $\mathsf{\Delta A}$ üzerine iki doğru $\mathsf{\Theta E}$ ve $\mathsf{\Theta\Delta}$ sürdürülmüş olsun. O zaman

$$\mathsf{\Theta E} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{\Theta H} \cdot \mathsf{ZE} :: \mathsf{\Theta B} \cdot \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Theta\Delta} \cdot \mathsf{B\Gamma}.$$

Kanıt.

- $\mathsf{\Theta}$'dan geçen ve $\mathsf{Z\Gamma A}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun, ve $\mathsf{\Delta A}$ ve AB bununla kesişmiş olsun K ve $\mathsf{\Lambda}$ noktalarında;
- $\mathsf{\Lambda}$'dan da geçen ve $\mathsf{\Delta A}$'ya paralel olan $\mathsf{\Lambda M}$ de [ilerletilmiş olsun], ve $\mathsf{E\Theta}$ ile kesişmiş olsun M'de.

Dolayısıyla,

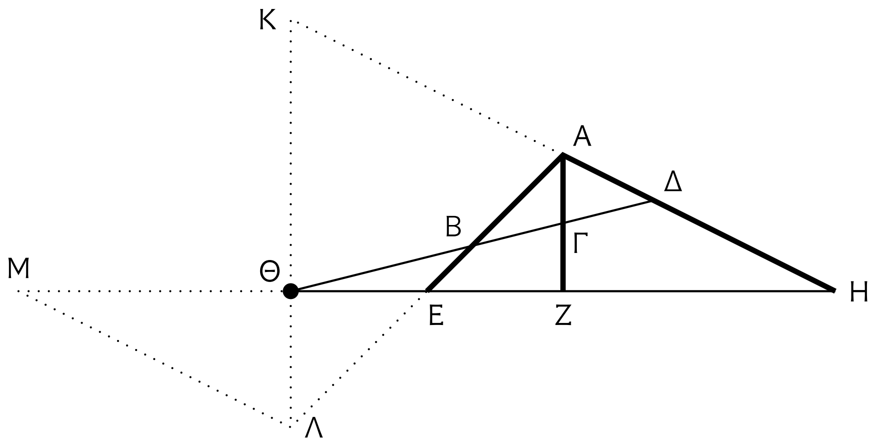
$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZA} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta\Lambda},$$
$$\mathsf{AZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{\Theta\Lambda} : \mathsf{\Theta M}$$

(çünkü ikisi, $\mathsf{\Theta K} : \mathsf{\Theta H}$ ile aynı, parallerden), [ve bunlar] olduğundan, böylece eşitlikten

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta M}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E} \cdot \mathsf{HZ} = \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{\Theta M}.$$



$\mathsf{EZ} \cdot \mathsf{\Theta H}$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned} \mathsf{E\Theta} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta} &:: \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{\Theta M} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta} \\ &:: \mathsf{\Theta M} : \mathsf{\Theta H} \\ &:: \mathsf{\Lambda\Theta} : \mathsf{\Theta K}. \end{aligned}$$

Aynı [şekil]de

$$\mathsf{K\Theta} : \mathsf{\Theta\Lambda} :: \mathsf{\Theta\Delta} \cdot \mathsf{B\Gamma} \cdot \mathsf{\Theta B} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta}.$$

Böylece tersine

$$\mathsf{\Lambda\Theta} : \mathsf{\Theta K} :: \mathsf{\Theta B} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{\Theta\Delta} \cdot \mathsf{B\Gamma}.$$

Ve

$$\mathsf{\Lambda\Theta} \cdot \mathsf{\Theta K} :: \mathsf{E\Theta} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta}$$

gösterilmiş oldu. Ve böylece

$$\mathsf{E\Theta} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta} :: \mathsf{\Theta B} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{\Theta\Delta} \cdot \mathsf{B\Gamma}. \qquad \square$$

Lemma III (Önerme 129)

Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta E : EZ} \;\;\&\;\; \mathsf{ZH : H\Theta},$$
$$\mathsf{\Theta E : EZ :: \Theta A : ZA},$$
$$\mathsf{ZH : H\Theta :: ZA : \Theta K}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot EZ :: \Theta \Lambda : ZA} \;\;\&\;\; \mathsf{ZA : \Theta K}.$$

Ayrıca

$$\mathsf{\Theta \Lambda : ZA} \;\;\&\;\; \mathsf{ZA : \Theta K :: \Theta \Lambda : \Theta K}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta \Lambda : \Theta K}.$$

Aynı [sebep]le

$$\mathsf{\Theta \Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma \Delta :: \Theta K : \Theta \Lambda}.$$

Ve tersine

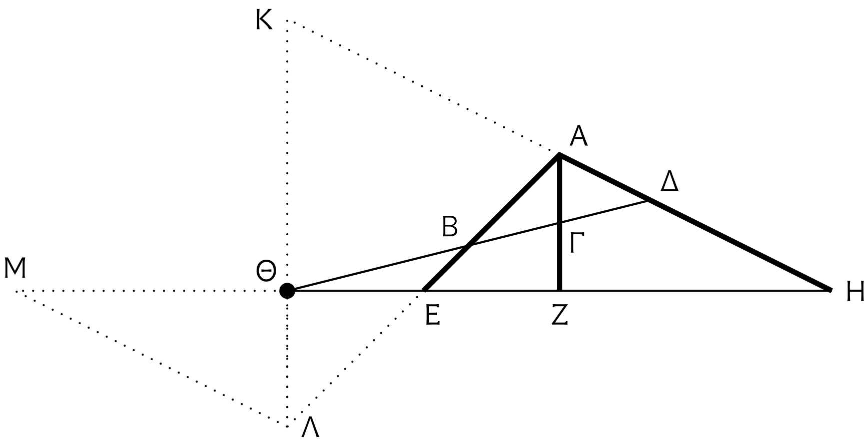
$$\mathsf{\Theta B \cdot \Gamma \Delta : \Theta \Delta \cdot B\Gamma :: \Theta \Lambda : \Theta K}.$$

Ama

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta \Lambda : \Theta K}$$

oldu. Ve böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Gamma \Delta : \Theta \Delta \cdot B\Gamma}. \qquad \square$$


K
Α
Δ
Β
Γ
Μ
Θ
Η
Ε
Ζ
Λ

Lemma IV (Önerme 130)

Diyagram ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛ [olsun], ve

$$\mathsf{AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ}$$

olsun. O zaman

Θ, Η, ve Ζ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. ΑΖ · ΒΓ : ΑΒ · ΓΖ :: ΑΖ · ΔΕ : ΑΔ · ΕΖ olduğundan izlemeyle

$$\underbrace{\mathsf{AZ \cdot B\Gamma : AZ \cdot \Delta E}}_{\mathsf{B\Gamma : \Delta E}} \mathsf{:: AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ.}$$

Ama (eğer Κ'dan ΑΖ'ya paralel olan ΚΜ ilerletilmiş ise)

$$\mathsf{B\Gamma : \Delta E :: B\Gamma : KN} \ \ \& \ \ \mathsf{KN : KM} \ \ \& \ \ \mathsf{KM : \Delta E,}$$
$$\mathsf{AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ :: BA : A\Delta} \ \ \& \ \ \mathsf{\Gamma Z : ZE.}$$

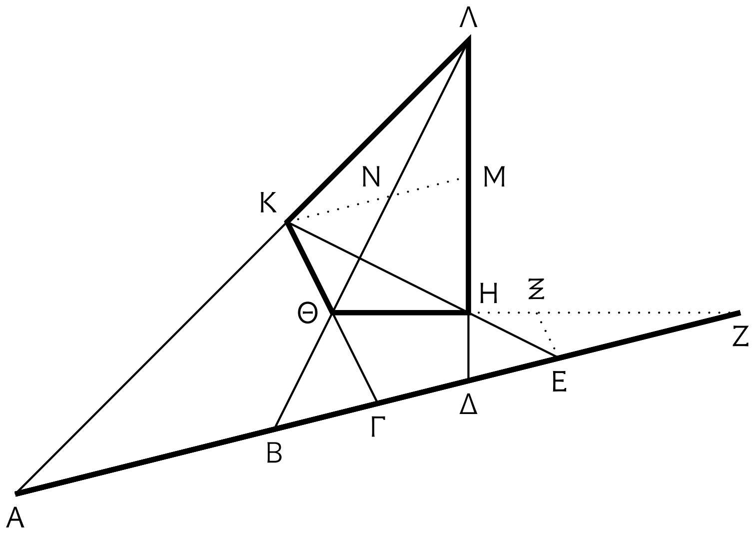
ΝΚ : ΚΜ ile aynı olan ortak ΒΑ : ΑΔ kovulmuş olsun, Böylece

$$\text{kalan } \mathsf{\Gamma Z : ZE ::} \underbrace{\mathsf{B\Gamma : KN}}_{\mathsf{\Theta\Gamma : K\Theta}} \ \ \& \ \ \underbrace{\mathsf{KM : \Delta E}}_{\mathsf{KH : HE.}}$$

Böylece

Θ, Η, ve Ζ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Zira eğer Ε'dan ΘΓ'ya paralel olan ΕΞ'yi ilerlersem, ve birleştirilmiş olan ΘΗ Ξ'ye uzatılmış olursa,



- ΚΗ : ΗΕ :: ΚΘ : ΕΞ,
- ΓΘ : ΘΚ & ΘΚ : ΕΞ bileşimi ΘΓ : ΕΞ oranıyla değiştirilir, ve

$$\text{ΓΖ : ΖΕ :: ΓΘ : ΕΞ.}$$

ΓΘ ΕΞ'ye paralel olunca, böylece

Θ, Ξ, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur

(zira bu apaçıktır), öyleyse ayrıca

Θ, H, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma V (Önerme 131)

Eğer diyagram ΑΒΓΔΕΖΗΘ ise [ve özel olarak Α, Η, ve Θ'dan geçen çizgi doğru ise],

$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma} :: \mathsf{AB} : \mathsf{B\Gamma}$$

meydana gelir. Dolayısıyla ΑΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΒΓ olsun. O zaman

Α, Η, ve Θ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. Η'dan ΑΔ'ya paralel olan ΚΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma} :: \mathsf{AB} : \mathsf{B\Gamma}$$

olduğundan, ama

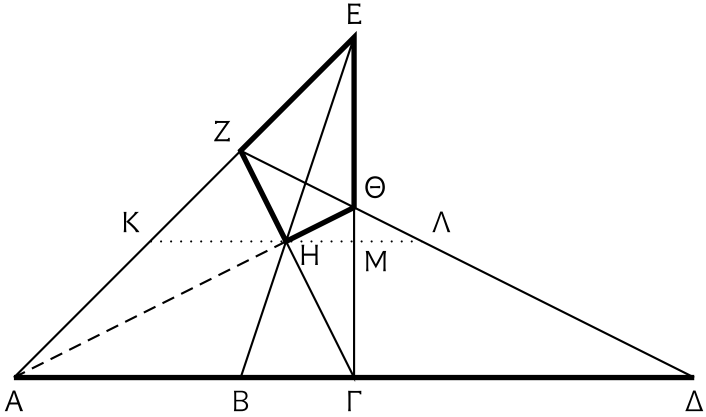
$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma} :: \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{\Lambda H},$$
$$\mathsf{AB} : \mathsf{B\Gamma} :: \mathsf{KH} : \mathsf{HM}$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$\mathsf{K\Lambda} : \mathsf{\Lambda H} :: \mathsf{KH} : \mathsf{HM},$$

ve

$$\begin{aligned}\text{kalan } \mathsf{H\Lambda} : \text{kalan } \mathsf{\Lambda M} &:: \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{\Lambda H}\\ &:: \mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma}.\end{aligned}$$



İzlemeyle

$$\mathsf{A\Delta : H\Lambda :: \Gamma\Delta : \Lambda M}$$
$$\mathsf{:: \Delta\Theta : \Theta\Lambda},$$

ve HΛ AΔ'ya paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu apaçıktır. □

Lemma VI (Önerme 132)

Yine eğer diyagram [ΑΒΓΔΕΖΗ] ise, ve ΔΖ ΒΓ'ya paralel ise,

$$\mathsf{AB} = \mathsf{B\Gamma}$$

meydana gelir. Dolayısıyla eşit olsun; o zaman

[ΔΖ ΒΓ'ya] paraleldir.

Kanıt. Olur da. Zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yı koyarsam, ve ΑΘ ve ΘΓ'yı birleştirirsem,

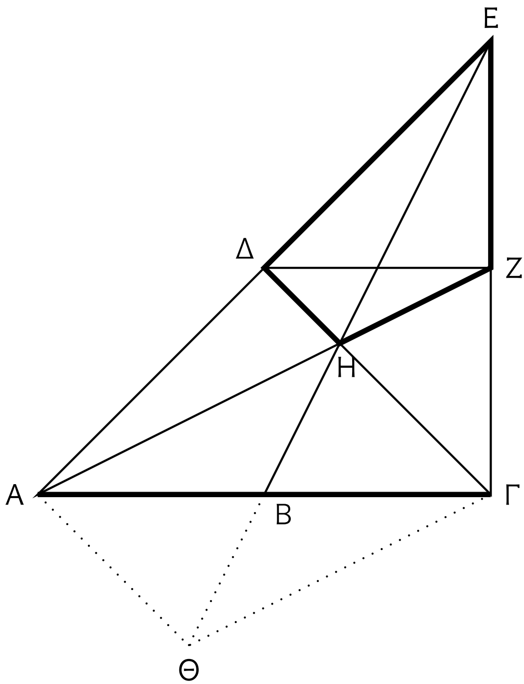
paralelkenar ΑΘΓΗ meydana gelir,

ve bundan

$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta E} :: \mathsf{\Gamma Z} : \mathsf{ZE}$$

(zira söylenmiş [iki oranın] her biri ΘΗ : ΗΕ oranıyla aynıdır). Öyleyse

ΔΖ ΑΓ'ya paraleldir. □


Ε
Δ
Ζ
Η
Α
Β
Γ
Θ

Lemma VII (Önerme 133)

Diyagram olsun, ve ΔB ve BΓ'nın orta orantılısı BA olsun (τῶν ΔB BΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ BA).[1] O zaman

ZH AΓ'ya paraleldir.

Kanıt. EB uzatılmış olsun, ve A'dan ΔZ doğrusuna paralel olan AK ilerletilmiş olsun, ve ΓK birleştirilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{\Gamma B : BA :: AB : B\Delta},$$
$$\mathsf{AB : B\Delta :: KB : B\Theta}$$

olduğundan, ayrıca

$$\mathsf{\Gamma B : BA :: KB : B\Theta}.$$

Böylece

AΘ KΓ'ya paraleldir.

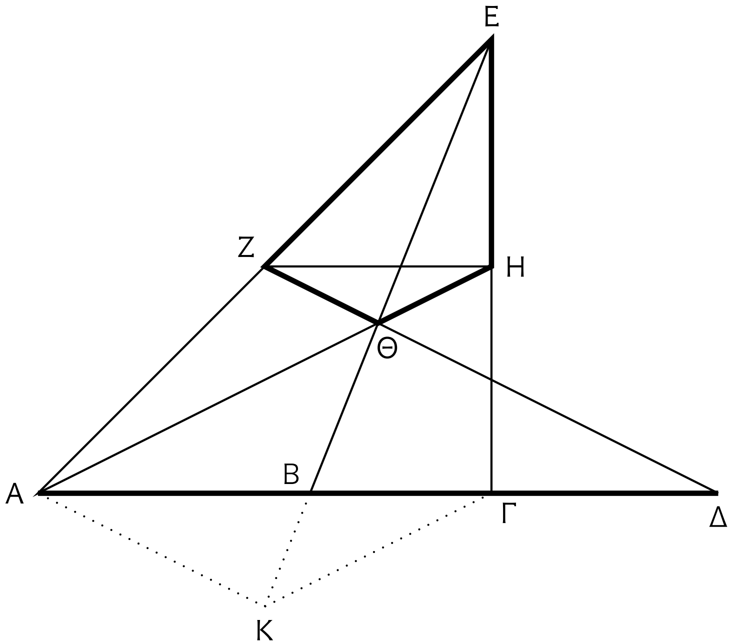
Dolayısıyla yine

$$\mathsf{AZ : ZE :: \Gamma H : HE}$$

(zira her oran KΘ : ΘE oranıyla aynıdır). Öyleyse

ZH AΓ'ya paraleldir. □

[1] Yani ΔB : BA :: BA : BΓ olsun. *Öğeler* Önerme VI.13'üne bakın. Yunan ἡ μέση ἀνάλογον teriminin İngilizcesi *mean proportional*'dır, örneğin lisede kullandığım geometri ders kitabında [21, s. 239]. Türkçe'de Demirtaş "orta orantılı" kullanır [4, s. 214], ama Atatürk "ortakoran" kullandı [2, s. 35].


Ε
Ζ
Η
Θ
Α
Β
Γ
Δ
Κ

Lemma VIII (Önerme 134)

Diyagram (ὁ βωμίσκος "küçük sunak") ΑΒΓΔΕΖΗ olsun, ve

ΔΕ ΒΓ'ya, ve ΕΗ ΒΖ'ya, paralel olsun.

O zaman

ΔΖ da ΓΗ'ya paraleldir.

Kanıt. ΒΕ, ΔΓ, ve ΖΗ birleştirmiş olsun. Böylece

ΔΒΕ üçgeni ΔΓΕ üçgenine eşittir.

Ortak ΔΑΕ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ΑΒΕ üçgeninin tümü, ΓΔΑ üçgeninin tümüne eşittir.

Yine ΒΖ ΕΗ'ya paralel olduğundan

ΒΖΕ üçgeni ΒΖΗ üçgenine eşittir.

Ortak ΑΒΖ üçgeni ayrılmış olsun. Böylece

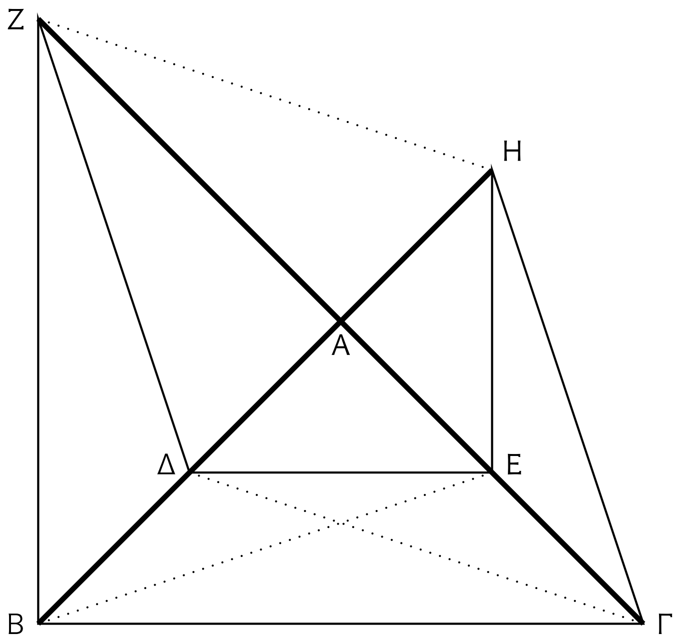
kalan ΑΒΕ üçgeni, kalan ΑΗΖ üçgenine eşittir.

Ama

ΑΒΕ üçgeni ΑΓΔ üçgenine eşittir.

Böylece

ΑΓΔ üçgeni de, ΑΗΖ üçgenine eşittir.



Ortak ΑΓΗ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ΓΔΗ üçgeninin tümü, ΓΖΗ üçgeninin tümüne eşittir.

Ve aynı ΓΗ tabanındadırlar. Böylece

ΓΗ ΔΖ'ya paraleldir. □

Lemma IX (Önerme 135)

Üçgen $\mathsf{AB\Gamma}$ olsun, ve orada $\mathsf{A\Delta}$ ve AE sürdürülmüş olsun, ve $\mathsf{B\Gamma}$'ya paralel olan ZH ilerletilmiş olsun, ve $\mathsf{Z\Theta H}$ eğilmiş olsun, ve

$$\mathsf{B\Theta} : \mathsf{\Theta\Gamma} :: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{\Theta E}$$

olsun. O zaman

$$\mathsf{K\Lambda}\ \mathsf{B\Gamma}\text{'ya paraleldir.}$$

Kanıt. Zira

$$\mathsf{B\Theta} : \mathsf{\Theta\Gamma} :: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{\Theta E}$$

olduğundan, böylece

$$\text{kalan BD} : \text{kalan GE} :: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{\Theta E}.$$

Ve

$$\mathsf{B\Delta} : \mathsf{E\Gamma} :: \mathsf{ZM} : \mathsf{NH};$$

böylece ayrıca

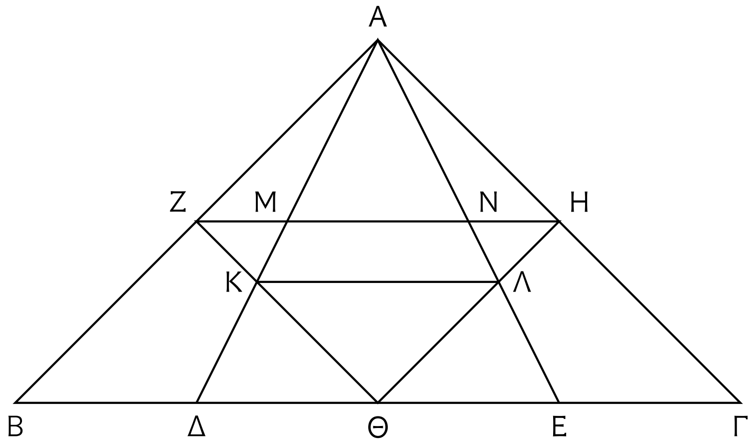
$$\mathsf{ZM} : \mathsf{NH} :: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{\Theta E}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{ZM} : \mathsf{\Delta\Theta} :: \mathsf{NH} : \mathsf{\Theta E}.$$

Ama paralellerden

$$\mathsf{ZM} : \mathsf{\Delta\Theta} :: \mathsf{ZK} : \mathsf{K\Theta},$$
$$\mathsf{HN} : \mathsf{\Theta E} :: \mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Lambda\Theta},$$



ve böylece

$$ΖΚ : ΚΘ :: ΗΛ : ΛΘ.$$

Böylece

ΚΛ ΗΖ'ya paraleldir,

öyleyse ΓΒ'ya. □

Lemma X (Önerme 136)

İki doğru BAE ve $\mathsf{\Delta AH}$ üzerine, $\mathsf{\Theta}$ noktasından geçen iki doğru $\mathsf{\Delta\Theta}$ ve $\mathsf{\Theta E}$ sürdürülmüş olsun, ve

$$\mathsf{\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH}$$

olsun. O zaman

$\mathsf{\Gamma}$, A, ve Z'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt.

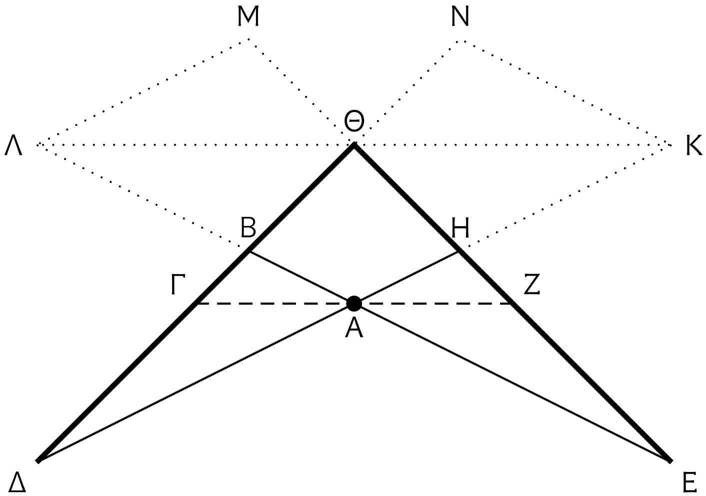
- $\mathsf{\Theta}$'dan ve $\mathsf{\Gamma A}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun,
- AB ve $\mathsf{A\Delta}$ ile K ve $\mathsf{\Lambda}$ noktalarında kesişmiş olsun,
- $\mathsf{\Lambda}$'dan $\mathsf{A\Delta}$'ya paralel olan $\mathsf{\Lambda M}$ ilerletilmiş olsun,
- $\mathsf{E\Theta}$ M'ye uzatılmış olsun,
- K'dan AB'ya paralel olan KN ilerletilmiş olsun,
- $\mathsf{\Delta\Theta}$ N'ye uzatılmış olsun.

Dolayısıyla paralellerden

$$\mathsf{\Delta\Theta : \Theta N :: \Delta\Gamma : \Gamma B}$$

olmuş olduğundan, böylece

$$\mathsf{\Delta\Theta \cdot \Gamma B = \Delta\Gamma \cdot \Theta N}.$$



$\mathsf{\Delta\Gamma \cdot B\Theta}$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned}\mathsf{\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta} &:: \mathsf{\Gamma\Delta \cdot \Theta N : \Delta\Gamma \cdot B\Theta} \\ &:: \mathsf{\Theta N : \Theta B}.\end{aligned}$$

Ama

$$\mathsf{\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH}$$

varsayılır, ve

$$\begin{aligned}\mathsf{\Theta N : \Theta B} &:: \mathsf{K\Theta : \Theta\Lambda} \\ &:: \mathsf{H\Theta : \Theta M} && \text{(paralellerden)} \\ &:: \mathsf{\Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE}.\end{aligned}$$

Ve böylece

$$\mathsf{\Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH :: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH = \Theta M \cdot ZE}.$$

Ve böylece

$$\mathsf{\Theta M : \Theta E :: HZ : ZE.}$$

Toplamayla ve izlemeyle

$$\mathsf{ME : EH :: \Theta E : EZ.}$$

Ama

$$\mathsf{ME : EH :: \Lambda E : EA,}$$

ve böylece

$$\mathsf{\Lambda E : EA :: \Theta E : EZ.}$$

Böylece

AZ, KΛ'ya paraleldir.

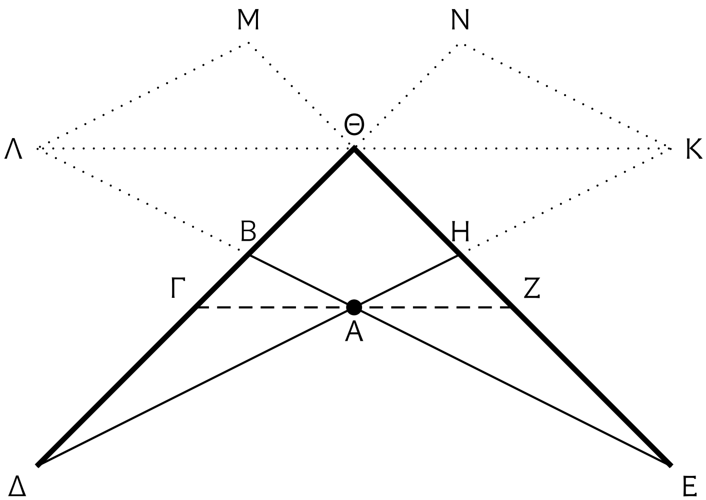
Ama

ΓA da [KΛ'ya paraleldir].

Böylece

ΓAZ doğrudur. □

Bunun durumları, tersi olan önceden yazılmışlarınki [yani Lemma III'ün durumları] gibidir.


M
N
Θ
Λ
K
B
H
Γ
Z
A
Δ
E

Lemma XI (Önerme 137)

Üçgen $\mathsf{AB\Gamma}$ [olsun], ve $\mathsf{A\Delta}$ $\mathsf{B\Gamma}$'ya paralel [olsun], ve sürdürülmüş olan $\mathsf{\Delta E}$, $\mathsf{B\Gamma}$ ile E noktada kesişmiş olsun. O zaman

$$\mathsf{\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE}.$$

Kanıt. $\mathsf{\Gamma}$'dan AE'a paralel olan $\mathsf{\Gamma\Theta}$ ilerletilmiş olsun, ve AB $\mathsf{\Theta}$'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{\Gamma A : AH :: \Gamma\Theta : ZH},$$
$$\mathsf{\Gamma A : AH :: E\Delta : \Delta H}$$

olduğundan, dahi

$$\mathsf{E\Delta : \Delta H :: \Theta\Gamma : ZH}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Gamma\Theta \cdot \Delta H = E\Delta \cdot ZH}.$$

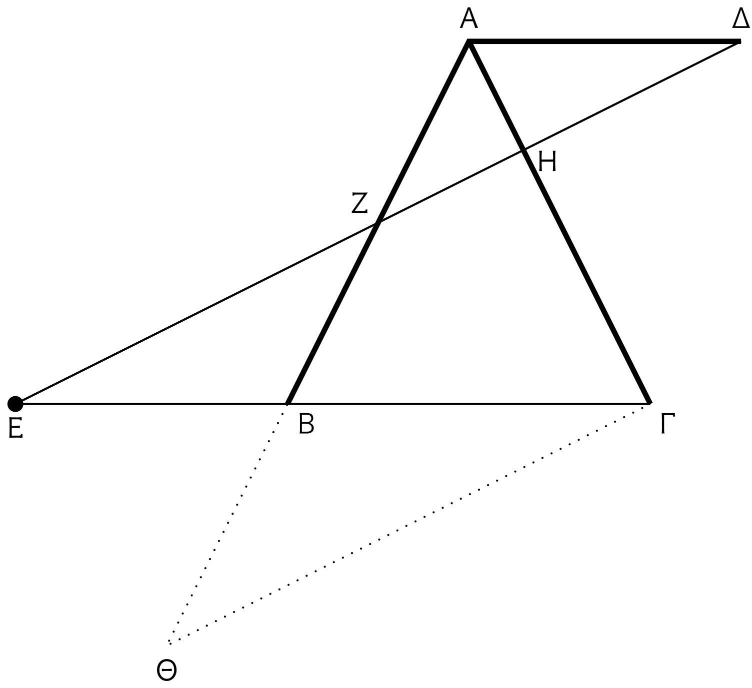
$\mathsf{EZ \cdot H\Delta}$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned}\mathsf{\Delta E \cdot ZH : \Delta H \cdot EZ} &\mathsf{::\Gamma\Theta \cdot \Delta H : \Delta H \cdot EZ}\\ &\mathsf{::\Gamma\Theta : EZ}\\ &\mathsf{::\Gamma B : BE}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\mathsf{\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE}.$$

Eğer $\mathsf{A\Delta}$ paraleli diğer tarafa da ilerletilmiş ise, ve $\mathsf{\Delta E}$ $\mathsf{\Delta}$'dan $\mathsf{\Gamma}$'nın ötesine sürdürülmüş ise, aynı şey [doğrudur]. □


Α
Δ
Η
Ζ
Ε
Β
Γ
Θ

Lemma XII (Önerme 138)

Bunlar şimdi kanıtlanmış olunca, eğer AB ve ΓΔ paralel ise, ve bunların üzerine bazı doğrular AΔ, AZ, BΓ, ve BZ düşerse, ve EΔ ve EΓ birleştirilirse, o zaman

H, M, ve K'dan geçen [çizgi'nin] doğru olduğu

gösterilecek.

Kanıt. Zira ΔAZ üçgen olduğundan, ve AE ΔZ'ya paralel olduğundan, ve ΔZ'ya Γ'da düşen EΓ sürdürülmüş olduğundan, önceden yazılmışlara göre

$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E}$$

meydana gelir. Yine ΓBZ üçgen olduğundan, ve ΓΔ'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan, ve ΓZΔ'ya Δ'da düşen ΔE sürdürülmüş olduğundan

$$\mathsf{\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot \Lambda K : \Delta K \cdot \Lambda E}$$

meydana gelir. Böylece tersine

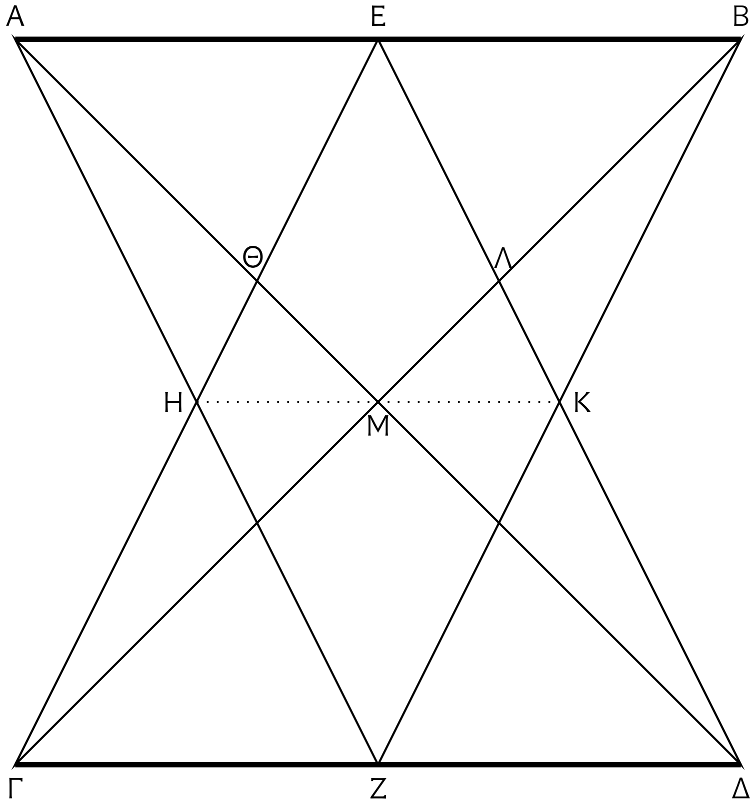
$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K}$$

meydana gelir.

$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E}$$

da oldu. Ve böylece

$$\mathsf{\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot K\Lambda.}$$



Dolayısıyla iki doğru ΕΓ ve ΕΔ, iki doğru ΓΜΛ ve ΔΜΘ'ya sürdürülmüş olduğundan, ve

$$\mathsf{\Gamma E} \cdot \mathsf{H\Theta} : \mathsf{\Gamma H} \cdot \mathsf{\Theta E} :: \mathsf{\Delta K} \cdot \mathsf{E\Lambda} : \mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{\Lambda K}$$

olduğundan, böylece

Η, Μ, ve Κ'dan [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu gösterilmiş oldu. □

Lemma XIII (Önerme 139)

Ama o halde AB ve ΓΔ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun. O zaman yine

$$\text{H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur.}$$

Kanıt. Üç doğru AN, AZ, ve AΔ üzerine aynı Γ noktasından iki doğru ΓE ve ΓΔ sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H : \Theta E :: \Gamma N \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z$$

meydana gelir. Yine aynı Δ noktasından, üç doğru BN, BΓ, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan

$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta : Z\Gamma :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

Ama

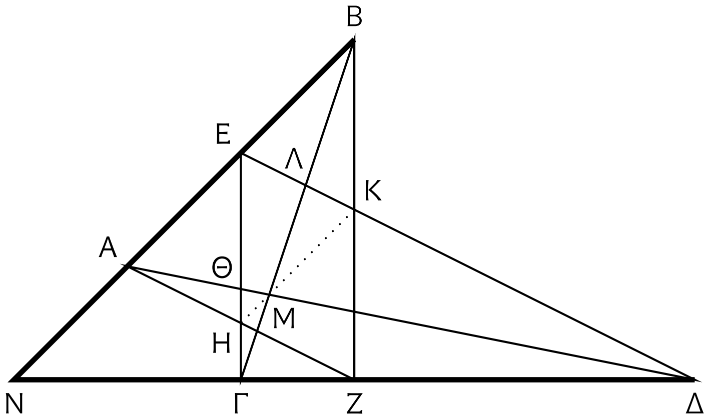
$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

gösterilmiş oldu. Ve dolayısıyla

$$\Gamma E \cdot \Theta H : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

O halde önceden yazılmışlara göre

$$\text{H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur.} \qquad \square$$


B
E
Λ
K
A
Θ
M
H
N
Γ
Z
Δ

Lemma XIV (Önerme 140)

AB ΓΔ'ya paralel olsun, ve AE ve ΓB sürdürülmüş olsun, ve [öyle] bir nokta BH'da Z [olsun] ki

$$\mathsf{\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot HZ : ZB \cdot \Gamma H}$$

[olsun]. O zaman

A, Z, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt.

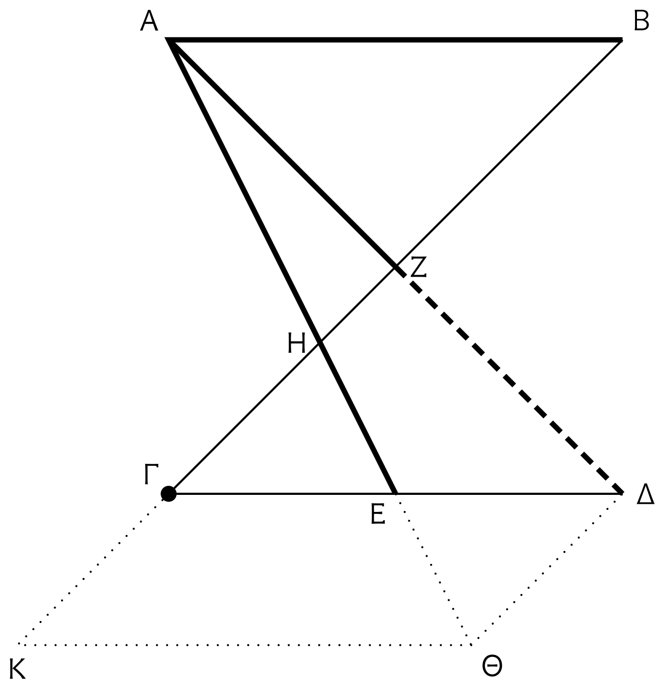
- Δ'dan BΓ'ya paralel olan ΔΘ ilerletilmiş olsun, ve AE Θ'ya uzatılmış olsun,
- Θ'dan ΓΔ'ya paralel olan ΘK [ilerletilmiş olsun], ve BΓ K'ya uzatılmış olsun.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathsf{\Delta E : E\Gamma} &:: \mathsf{\Gamma B \cdot ZH : ZB \cdot \Gamma H}, \\ \mathsf{\Delta E : E\Gamma} &:: \mathsf{\Delta\Theta : \Gamma H} \\ &:: \mathsf{\Delta\Theta \cdot BZ : \Gamma H \cdot BZ} \end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{B\Gamma \cdot ZH :: \Delta\Theta \cdot BZ.}$$



Böylece

$$\begin{aligned} \mathsf{\Gamma B : BZ} &:: \mathsf{\Delta\Theta : HZ} \\ &:: \mathsf{\Gamma K : HZ} \end{aligned}$$

orantı vardır. Böylece ayrıca

$$\begin{aligned} \mathsf{KB}\ \text{tümü} : \mathsf{BH}\ \text{tümü} &:: \mathsf{K\Gamma : ZH} \\ &:: \mathsf{\Delta\Theta : ZH}. \end{aligned}$$

Ama paralellerden

$$\mathsf{KB : BH} :: \begin{cases} \mathsf{\Theta A : AH}, \\ \mathsf{\Delta\Theta : ZH}. \end{cases}$$

Ve ΔΘ ve ZH paraleldir. Böylece

A, Z, ve Δ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma XV (Önerme 141)

Bu önceden bakılmış olunca, ΑΒ ΓΔ'ya paralel olsun, ve bunların üzerine doğrular ΑΖ, ΖΒ, ΓΕ, ve ΕΔ düşmüş olsun, ve ΒΓ ve ΗΚ birleştirilmiş olsun. O zaman

Α, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. ΔΜ birleştirilmiş olsun ve Θ'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla ΒΓΖ üçgeninin Β tepe noktasından ΓΔ'ya paralel olan ΒΕ ilerletilmiş olduğundan ve ΔΕ sürdürülmüş olduğundan,

$$\mathsf{\Gamma Z} : \mathsf{Z\Delta} :: \mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{E\Lambda} \cdot \mathsf{K\Delta}$$

meydana gelir. Ayrıca

$$\mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{\Delta K} \cdot \mathsf{\Lambda E} :: \mathsf{\Gamma H} \cdot \mathsf{\Theta E} : \mathsf{\Gamma E} \cdot \mathsf{H\Theta}$$

(zira üç doğru ΓΛ, ΔΘ, ve ΗΚ üzerine aynı Ε noktasından iki doğru ΕΓ ve ΕΔ sürdürülmüştür). Böylece

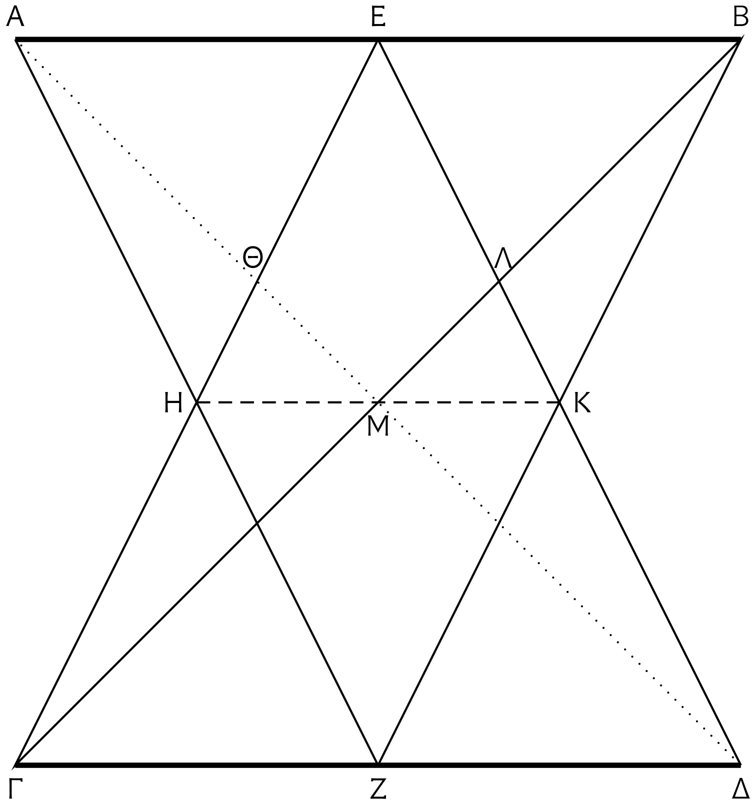
$$\mathsf{\Delta Z} : \mathsf{Z\Gamma} :: \mathsf{\Gamma E} \cdot \mathsf{H\Theta} : \mathsf{\Gamma H} \cdot \mathsf{\Theta E}.$$

Ayrıca

Θ, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece önceden yazılmıştan ayrıca

Α, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur. □


Α
Ε
Β
Θ
Λ
Η
Κ
Μ
Γ
Ζ
Δ

Lemma XVI (Önerme 142)

İki doğru AB ve $\mathsf{A\Gamma}$ üzerine aynı A noktasından $\mathsf{\Delta B}$ ve $\mathsf{\Delta E}$ sürdürülmüş olsun, ve bunlarda H ve $\mathsf{\Theta}$ noktaları alınmış olsun, ve

$$\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta}$$

olsun. O zaman

A, H, ve $\mathsf{\Theta}$'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan $\mathsf{B\Delta}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot ZH :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta}$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned}\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ} &\mathsf{:: HE : E\Delta \ \&\ \Delta Z : ZH} \\ &\mathsf{:: KH : B\Delta \ \&\ \Gamma\Delta : H\Lambda}\end{aligned}$$

olduğundan, ve ayrıca

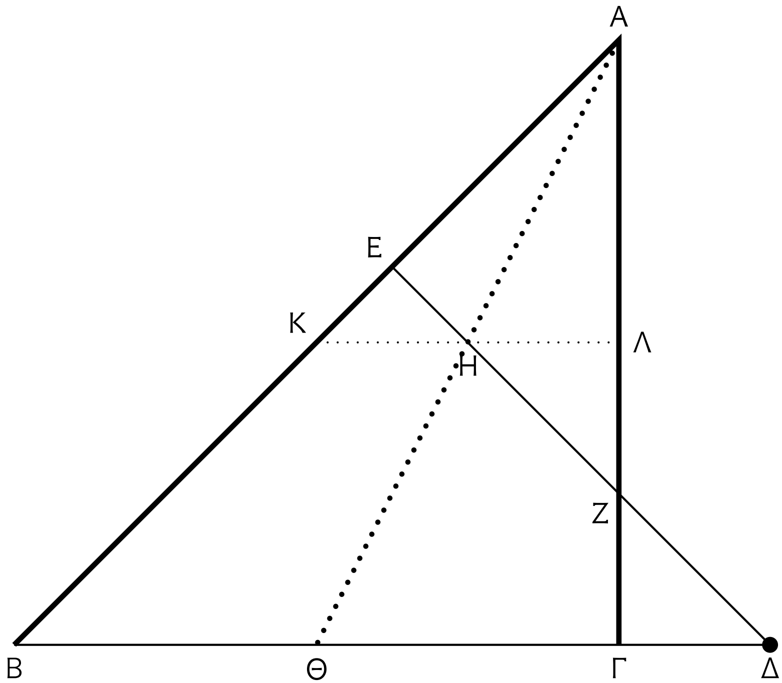
$$\mathsf{B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta :: \Theta B : B\Delta \ \&\ \Delta\Gamma : \Gamma\Theta}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{KH : B\Delta \ \&\ \Gamma\Delta : H\Lambda :: B\Theta : B\Delta \ \&\ \Delta\Gamma : \Gamma\Theta.}$$

Ve

$$\mathsf{KH : B\Delta :: KH : B\Theta \ \&\ B\Theta : B\Delta;}$$



böylece

$$\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta}\ \ \&\ \ \mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta}\ \ \&\ \ \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{H\Lambda} :: \mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta}\ \ \&\ \ \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Theta}.$$

Ortak $\mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta}$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\begin{aligned} \mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta}\ \ \&\ \ \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{H\Lambda} &:: \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Theta} \\ &:: \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{H\Lambda}\ \ \&\ \ \mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Theta\Gamma}. \end{aligned}$$

Ve yine ortak $\mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{H\Lambda}$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta} :: \mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Theta\Gamma}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{KH} : \mathsf{H\Lambda} :: \mathsf{B\Theta} : \mathsf{\Theta\Gamma},$$

ve $\mathsf{K\Lambda}$ ve $\mathsf{B\Gamma}$ paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma XVII (Önerme 143)

Ama o halde AB ve ΓΔ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun.

Kanıt. Dolayısıyla aynı A noktasından üç doğru BN, BΓ, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan,

$$\mathsf{N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot \Delta Z :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta}.$$

Ve

$$\mathsf{E\Delta \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta :: E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H}$$

(zira yine üç doğru ΓΛ, ΔΘ, ve HK üzerine aynı E noktasından sürdürülmüştür iki doğru EΓ ve EΔ). Ayrıca

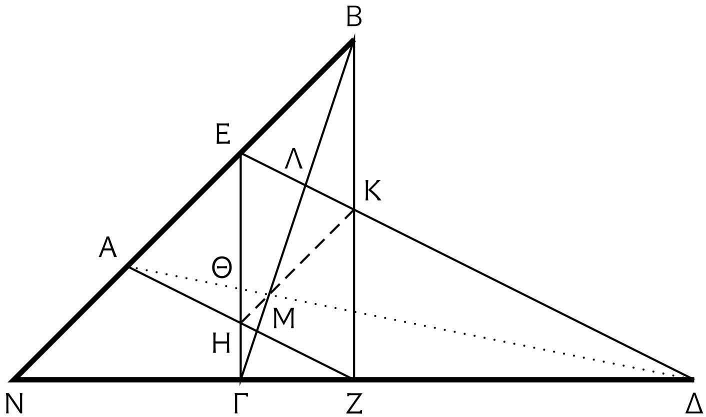
$$\mathsf{E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H :: N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot Z\Delta}.$$

O halde önceden yazılmıştan

A, Θ, ve Λ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece

A, M, ve Λ'dan [geçen çizgi] doğrudur. □



B
E
Λ
K
A
Θ
M
H
N
Γ
Z
Δ

Lemma XVIII (Önerme 144)

Üçgen ΑΒΓ [olsun], ve ΒΓ'ya paralel olan ΑΔ ilerletilmiş olsun, ve ΔΕ ve ΖΗ sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$\mathsf{EB}^2 : \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} :: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma}$$

olsun (ἔστω δὲ ως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ). O zaman ΒΔ birleştirilirse,

Θ, Κ, Γ'dan [geçen çizgi] doğru olur.

Kanıt. $\mathsf{EB}^2 : \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} :: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma}$ olduğundan, $\mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma}$ ile aynı olan ortak ΓΕ : ΕΒ oranı eklenmiş olsun. Böylece eşitlikten

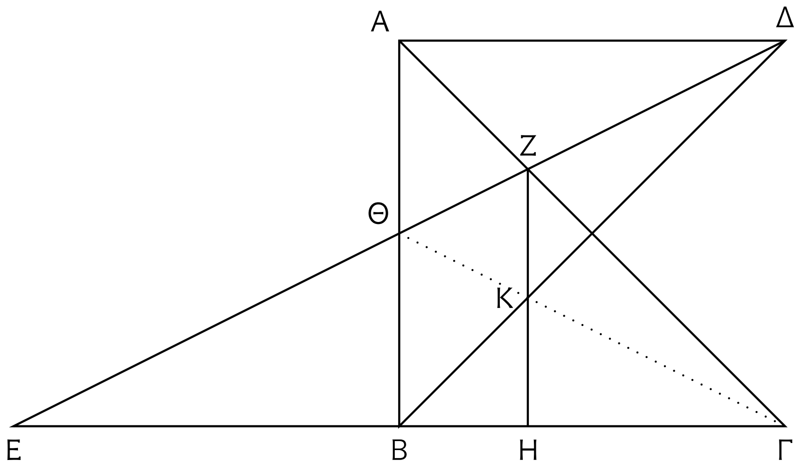
$$\left.\begin{matrix} \mathsf{EB}^2 : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma} \\ \mathsf{EB} : \mathsf{B\Gamma} \end{matrix}\right\} :: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma} \;\;\&\;\; \underbrace{\mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma}}_{\mathsf{E\Gamma} : \mathsf{EB}}.$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} \mathsf{EB}^2 : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma} &:: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma} \;\;\&\;\; \mathsf{E\Gamma} : \mathsf{EB} \\ &:: \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{BH} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{\Gamma H}. \end{aligned}$$

Önceden yazılmış lemmadan

$$\mathsf{EB} : \mathsf{B\Gamma} :: \mathsf{\Delta Z} \cdot \mathsf{\Theta E} : \mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{Z\Theta},$$



ve böylece

$$\mathsf{\Gamma E \cdot BH : \Gamma H \cdot EB :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta.}$$

Böylece

Θ, Κ, ve Γ’dan [geçen çizgi] doğrudur,

zira bu, [Lemma X’un] karşıt tersinin durumlarındadır. □

Lemma XIX (Önerme 145)

Üç doğru AB, $\mathsf{A\Gamma}$, $\mathsf{A\Delta}$ üzerine bir E noktasından iki doğru EZ ve EB sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$\mathsf{EZ : ZH :: \Theta E : \Theta H}$$

olsun. O zaman

$$\mathsf{BE : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma}$$

meydana gelir.

Kanıt. H'dan BE'a paralel olan $\mathsf{\Lambda K}$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H}$$

olduğundan, ama

$$\mathsf{EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H},$$

$$\mathsf{E\Theta : \Theta H :: \Delta E : H\Lambda}$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$\mathsf{BE : HK :: \Delta E : H\Lambda}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{EB : E\Delta :: KH : H\Lambda}.$$

Ve

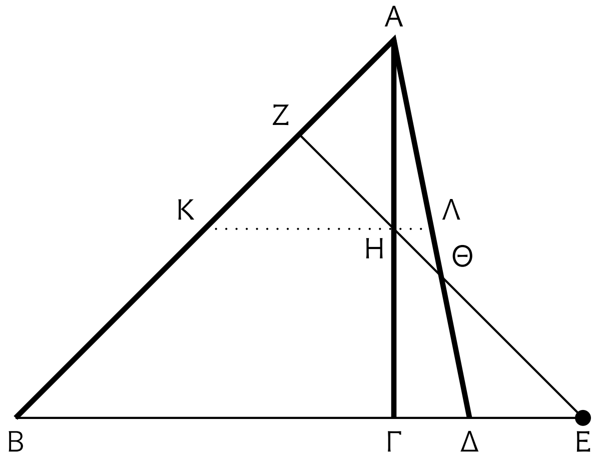
$$\mathsf{KH : H\Lambda :: B\Gamma : \Gamma\Delta}.$$

Böylece ayrıca

$$\mathsf{BE : E\Delta :: B\Gamma : \Gamma\Delta}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{EB : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma}. \qquad \square$$



[Diğer] durumlar da benzerdir.

Ek

Fiiller Sözlüğü

ἄγω ilerle= (örneğin Lemma I'de: **Ἤχθω** διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΖΛ, "Z'dan BΔ'ya paralel olan ZΛ *ilerletilmiş olsun*")

ἀγάγω (sadece Lemma IV'te: Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον **ἀγάγω** τὴν ΕΞ, "Eğer E'dan ΘΓ'ya paralel olan EΞ *ilerlersem*")

διάγω sürdür= (örneğin Lemma III'te: Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΑ ΔΑ **διήχθωσαν** δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ, "Üç doğru AB, ΓA, ve ΔA üzerine iki doğru ΘE ve ΘΔ *sürdürülmüş olsun*")

ἁιρέω

ἀφαιρέω ayır= (Lemma VIII)

βάλλω

ἐκβάλλω uzat=

μεταβάλλω değiştir=

γιγνόμαι ol= (doğ=, meydana gel=)

γράφω

προγράφω önceden yaz=

δείκνυμι göster=

ἀποδείκνυμι kanıtla= (Lemma XII)

εἰμι ol=

ἐρῶ söyle= (λέγω'nun gelecek zamanı olarak kullanılır. Lemma VI'da sadece: ἑκατέρων γὰρ τῶν **εἰρημένων** ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος, "zira *söylenmiş* [iki oranın] her biri, ΘH : HE oranıyla aynıdır")

ἔχω -i ol=

ζεύγνυμι birleştir=

  ἐπιζεύγνυμι birleştir=

θεωρέω

  προθεωρέω önceden bak= (Sadece Lemma XV'te: Τούτου προτεθεωρημένου [*genitivus absolutus*], "Bu önceden bakılmış olunca")

κεῖμαι otur=

  προσκεῖμαι eklen=

  ὑποκεῖμαι varsayıl=

κλάω eğ= (Lemma IX: **κεκλάσθω** ἡ ΖΘΗ, "ΖΘΗ *eğilmiş olsun*")

κρούω

  ἐκκρούω kov=

λαμβάνω al= (Lemma XVI'da: ἐπ' αὐτῶν **εἰλήφθω** σημεῖα τὰ Η Θ, "bunlarda Η ve Θ noktaları *alınmış olsun*")

πίπτω

  ἐμπίπτω üzerine düş=

  συμπίπτω kesiş= (her zaman **συμπιπτέτω** [tekil] veya **συμπιπτέτωσαν** [çoğul], "*kesişmiş olsun*")

τίθημι koy= (Lemma VI: ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ **θῶ** τῇ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ, "zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yı *koyarsam*")

τυγχάνω rastla= (**τυχόν**, "rasgele": aşağıya bakın)

Edatlar Sözlüğü

ἀλλά ama

ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ τῶν . . . . · . . . da başka rasgele bir [çarpımdır] (örneğin Lemma III'e bakın)

ἄρα böylece

διὰ ταὐτά aynı [sebep]le

γάρ zira

[*genitivus absolutus*] -ince

δέ de, ve

δή o halde

ἐπεί -diğinden

καί de, dahi, ve, ayrıca—örneğin Lemma I'de:

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Εβ πρὸς τὴν ΒΛ,
οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ,
καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ,

$$\text{Ama paralellerden } \mathsf{KB} : \mathsf{BH} :: \begin{cases} \mathsf{\Theta A} : \mathsf{AH}, \\ \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{ZH}. \end{cases}$$

κατὰ τὰ αὐτά aynı [şekil]de

μέν. . . δέ •. . . •. . . de

οὖν dolayısıyla

πάλιν yine

τουτέστιν yani—örneğin Lemma I'de:

ἐστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ,
τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ,
οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ,

$$\underbrace{\mathsf{\Delta A} : \mathsf{AZ}}_{\mathsf{BA} : \mathsf{A\Lambda}} :: \mathsf{\Gamma A} : \mathsf{AH},$$

ve Lemma III'te:

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ,
τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ,

$$\mathrm{E\Theta} \cdot \mathrm{HZ} : \mathrm{EZ} \cdot \mathrm{H\Theta} :: \mathrm{EZ} \cdot \mathrm{\Theta M} : \mathrm{EZ} \cdot \mathrm{H\Theta} :: \mathrm{\Theta M} : \mathrm{\Theta H} :: \mathrm{\Lambda\Theta} : \mathrm{\Theta K}.$$

ὥστε öyleyse

Yunan Alfabesi

Α	α	alfa	Ν	ν	nü
Β	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omikron (“küçük o”)
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ε	epsilon (“çıplak e”)	Ρ	ρ	rho
Ζ	ζ	zeta	Σ	σ, ς	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	üpsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ	phi
Κ	κ	kappa	Χ	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mü	Ω	ω	omega (“büyük o”)

Harfler, Yunan Font Derneği’nin “NeoHellenic” fontundan alınır. Bu font

δ = ẟ, Ε = Ͼ, ζ = ʒ, Ξ = Ξ = Ɨ, Ω = Ѡ

alternatif biçimlerini sağlar. Sigmanın küçük ς biçimi sadece bir sözcüğün sonunda kullanılır.

Kaynakça

[1] Archimedes. *The Two Books* On the Sphere and the Cylinder, volume I of *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.

[2] Mustafa Kemal Atatürk. *Geometri*. Türk Dil Kurumu, Ankara, 2000. 4. baskı. 1. baskı 1971.

[3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük*. Kabalcı, İstanbul, 2011.

[4] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü*. Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[5] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.

[6] Euclid. *Öklid'in* Öğeler*'inin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 4th edition, September 2014. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce.

[7] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.

[8] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.

[9] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York, 1972.

[10] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, Oxford, 1996. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.

[11] James Morwood and John Taylor, editors. *Pocket Oxford Classical Greek Dictionary.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[12] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.

[13] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation.* Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.

[14] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.

[15] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics.* 2 vols. Dover Publications Inc., New York, 1959. Unabridged republication of the first edition, 1929, published by McGraw-Hill.

[16] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar.* Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.

[17] D. J. Struik, editor. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800.* Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Reprint of the 1969 edition.

[18] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. `http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488`.

[19] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid.* Number 335 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor.

[20] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Pappus.* Number 362 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1951. With an English translation by the editor.

[21] Arthur W. Weeks and Jackson B. Adkins. *A Course in Geometry: Plane and Solid.* Ginn and Company, Lexington, Massachusetts, 1970.

yazar	eserinin adı	Yunancası	İngilizcesi	
Öklid	*Veriler*	Δεδώμενα	*Data*	1
Apollonius	*Oranın Kesilmesi*	Λόγου ἀποτομή	*Cutting-off of a Ratio*	2
Apollonius	*Alanın Kesilmesi*	Χωρίου ἀποτομή	*Cutting-off of an Area*	2
Apollonius	*Belirli Kesit*	Διωρισμένης τομή	*Determinate Section*	2
Apollonius	*Teğetler*	Ἐπαφαί	*Tangencies*	2
Öklid	*Porizmalar*	Πορίσματα	*Porisms*	3
Apollonius	*Yönelmeler*	Νεύσεις	*Vergings*	2
Apollonius	*Düzlem Yerleri*	Τόποι ἐπιπέδοι	*Plane Loci*	2
Apollonius	*Koni Kesitleri*	Κωνικαί	*Conics*	8
Aristaeus	*Cisim Yerleri*	Τόποι στερεοί	*Solid Loci*	5
Öklid	*Yüz Yerleri*	Τόποι τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ	*Surface Loci*	2
Eratosthenes	*Ortalar hakkında*	Περὶ μεσοτήται	*On Means*	2

Analiz Hazinesi'nin içindekiler (son sütun, eserin kitap [cilt] sayısını verir)